Analysis I für M, LaG/M, Ph
4.Tutorium

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
06./07.05.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Eine alternative Definition?)

Herr Semil erklärt auf seiner privaten Website mathematisch interessierten Besuchern den Begriff „Grenzwert" folgendermaßen:

> „Wenn eine Folge einer Zahl in jedem Schritt näher kommt ohne diese Zahl jemals zu erreichen, so nennt man diese Zahl den Grenzwert der Folge."

Warum ist diese „Definition" von Herrn Semil *nicht* äquivalent zu unserer Definition eines Grenzwertes aus der Vorlesung? Geben Sie ein Beispiel einer Folge an, die nach der Definition von Herrn Semil die Zahl 0 als Grenzwert haben würde, aber nicht nach unserer Definition, sowie ein Beispiel für den umgekehrten Fall.

Lösung: Herr Semil, der nebenbei bemerkt natürlich frei erfunden war, nennt zwei Kriterien, nämlich muss die Folge dem vermeintlichen Grenzwert in jedem Schritt näher kommen und zusätzlich verlangt er, dass die Folge diesen Grenzwert niemals erreicht.

Als erstes Beispiel wählen wir die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Diese Folge kommt der Zahl 0 in jedem Schritt näher, da sie positiv und streng monoton fallend ist. Dennoch erreicht sie die 0 nie, da sie ja sogar die Zahl $\frac{1}{1000}$ nie erreicht. Nach der „Definition" unseres Herrn Semil wäre 0 somit ein Grenzwert der Folge. Nach unserer Definition ist aber 0 natürlich kein Grenzwert, denn der Grenzwert ist ja $\frac{1}{1000}$ und eindeutig bestimmt.

Nun brauchen wir noch eine Folge, die nach unserer Definition gegen 0 konvergiert, aber nicht die beiden Eigenschaften besitzt, der 0 in jedem Schritt näher zu kommen und sie nie zu erreichen. Interessanterweise sind beide Dinge, die Herr Semil fordert, nicht notwendig zur Konvergenz. Zum Beispiel ist die konstante Nullfolge $(0)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, die gegen 0 konvergiert, aber offensichtlich ist es nicht korrekt, dass sie die 0 nie erreicht, denn sie ist ja gleich der Null. Ein Beispiel, das demonstriert, dass es durchaus vorkommen kann, dass sich konvergente Folgen unendlich oft echt von ihrem Grenzwert wegbewegen, zeigt die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{2+(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, da die Terme immer abwechselnd von der Null weg und zur Null hingehen.

Abschließend kann man sagen, dass das Problem an der Semilschen Definition ist, dass es überhaupt nicht darauf ankommt, ob der Grenzwert irgendwann erreicht wird oder ob sich die Folge monoton darauf zubewegt, sondern dass es entscheidend ist, ob die Folge dem Grenzwert beliebig nahe kommt. Eine Zahl ist also Grenzwert der Folge, falls die Folge jede noch so kleine Umgebung der Zahl ab irgendeinem Index erreicht und danach nie wieder diese Umgebung verlässt. Und das leistet gerade unsere ε-Definition.

Aufgabe T2 (Divergenz von Folgen)

Richtig oder falsch (natürlich mit Beweis oder Gegenbeispiel):

Sind (a_n) und (b_n) divergente reelle Folgen, dann auch $(a_n + b_n)$.

Lösung: falsch.

Gegenbeispiel: Die Folgen $a_n := (-1)^n$ ist divergent (Beispiel 7.4c), nach H1(b) auf dem 4. Übungsblatt ist auch die verschobene Folge $b_n := a_{n+1} = (-1)^{n+1}$ divergent. Nun ist aber $a_n + b_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n(1-1) = 0$ konstant, also die Folge $(a_n + b_n)$ konvergent. $\square$

Aufgabe T3 (Weg ins Nirvana:)
Frei nach Buddha: Der Weg zum Nirvana ist einen Meter breit und mit einer Folge von Platten $P_1, P_2, \ldots$ der gemeinsamen Breite 1 und den Längen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ (mit $l_i > 0$ und $l_1 \neq 1$) lückenlos gepflastert. Von der zweiten Platte an ist jede Platte P_n ähnlich, aber nicht kongruent[1] zu dem bis dahin (mit den Platten $P_1, \ldots, P_{n-1}$) gepflasterten Teil des Weges.
Zeigen Sie, dass der Weg ins Nirvana unendlich lang ist.

Lösung: Es sei S_n die Länge des Teilweges, der mit den ersten n Platten bedeckt ist. D.h.: $S_n = \sum_{k=1}^n l_k$.
Da die $n+1$-te Platte ähnlich dem bis dahin gepflasterten Weg ist, gilt $\frac{1}{s_n} = \frac{l_{n+1}}{1}$ oder $\frac{s_n}{1} = \frac{l_{n+1}}{1}$. Die zweite Möglichkeit scheidet aus, denn dann wären die Rechtecke ja kongruent. Also ist $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n}$. Die Folge S_n kann nicht gegen einen reellen Wert $S \in \mathbb{R}$ konvergieren, denn sonst wäre $S > 0$ und nach Satz 7.8 (d) würde $S = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} \stackrel{G1(b)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(S_n + \frac{1}{S_n}\right) = S + \frac{1}{S}$ gelten. Da die Folge S_n monoton wächst ($l_i > 0$) und divergiert, ist sie unbeschränkt, übersteigt also jede reelle Zahl. Das bedeutet, dass der Weg "unendlich lang" ist.

Aufgabe T4 (Babylonisches Wurzelziehen)
Seien $a > 0$ und $x_1 > 0$ reelle Zahlen. Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $x_n^2 \geq a$ für alle $n \geq 2$ und die Folge $(x_n)_{n=2}^\infty$ monoton fällt.
(b) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Lösung:

(a) *Behauptung:* $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis (Induktion):
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist das laut Voraussetzung richtig.
Induktionsannahme: Für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelte $x_n > 0$.
Induktionsschritt: Dann ist auch $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) > 0$, was sich natürlich wieder unmittelbar aus den Anordnungsaxiomen zeigen lässt, doch solange nicht danach gefragt wird, dürfen wir an dieser Stelle der Vorlesung schon solch große Schritte unternehmen. □
Behauptung: $x_n^2 \geq a$ für alle $n \geq 2$.
Beweis: Sei $n \geq 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_n^2 &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) = a + \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) \\ &= a + \underbrace{\frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2}_{\geq 0} \geq a \end{aligned}$$

□

Behauptung: $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \geq 2$.
Beweis: Sei $n \geq 2$. Dann ist $x_n^2 \geq a$, also $\frac{a}{x_n} \leq x_n$ (da $x_n > 0$). Es folgt

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n.$$

□

(b) Da $x_n \geq 0$ und für alle $n \geq 2$ gilt $x_n^2 \geq a = \sqrt{a}^2$, folgt mit Lemma 6.1 $x_n \geq \sqrt{a}$. D.h. die Folge $(x_n)_{n=2}^\infty$ ist nach unten durch $\sqrt{a} > 0$ beschränkt. Da die Folge $(x_n)_{n=2}^\infty$ weiterhin monoton fällt, hat sie einen Grenzwert $y = \inf_{n\geq 2} x_n$ (Monotonie-Kriterium, Satz 7.11). Da $\sqrt{a}$ eine untere Schranke von $\{x_n : n \geq 2\}$ ist und y die größte zu dieser Menge, gilt $y \geq \sqrt{a} > 0$.
Nach H1(b) vom 4. Übungsblatt konvergiert auch die Folge $(x_{n+1})_{n=2}^\infty$ gegen y. Nun ist

$$y = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \stackrel{\text{Satz 7.8(d)}}{=} \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{a}{y}\right).$$

Folglich gilt $y^2 = a$, also $\sqrt{a} \stackrel{y\geq 0}{=} y = \lim_{n\to\infty} a_n$.

[1] Zwei Rechtecke mit Seitenlängen $a \leq b$ bzw. $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ heißen ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$ gilt. Sie heißen kongruent, wenn sie zusätzlich gleiche Flächen haben.