Analysis I für M, LaG/M, Ph
3.Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
29./30.04.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Abzählbarkeit)
Beweisen Sie Satz 4.7 aus dem Skript:
Es seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ abzählbare Mengen. Dann ist auch die Menge $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ abzählbar.

Lösung: Um mehrfach auftretende Elemente zu vermeiden definieren wir zunächst $\bar{X}_1 = X_1$ und $\bar{X}_k = X_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \bar{X}_j$ für alle $k = 2, 3, \ldots$. Dann gilt $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{X}_j$ und wir betrachten von nun an die Mengen $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \ldots$. Sei $x_{j,i}$ das i-te Element der Menge $\bar{X}_j$. Wir nummerieren nun analog zu Beispiel 4.5(c) im Skript

$$\begin{tikzcd}
x_{1,1} \arrow[r] & x_{2,1} \arrow[dl] & x_{3,1} \arrow[r] & x_{4,1} \arrow[dl] & \cdots \\
x_{1,2} \arrow[d] & x_{2,2} \arrow[ur] & x_{3,2} \arrow[dl] & x_{4,2} & \cdots \\
x_{1,3} \arrow[ur] & x_{2,3} \arrow[dl] & x_{3,3} & x_{4,3} & \cdots \\
x_{1,4} & x_{2,4} & x_{3,4} & x_{4,4} & \cdots
\end{tikzcd}$$

und erhalten somit die Abzählbarkeit der Menge $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{X}_j$ und somit der Menge $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$.

Aufgabe T2 (Suprema)
Es sei I eine Menge und $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ eine (endliche oder unendliche) Familie von nichtleeren Mengen $M_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ sowie $M = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ deren Vereinigung. Ferner sei $m_\alpha = \sup M_\alpha$. Zeigen Sie, dass $\sup M = \sup\{m_\alpha : \alpha \in I\}$ gilt.

Lösung: Wir nehmen an, dass M nach oben beschränkt ist. Andernfalls existiert das Supremum nicht. Es sei $x \in M$. Das heißt, es gibt ein $\alpha \in I$ mit $x \in M_\alpha$. Damit folgt $x \le m_\alpha \le \sup\{m_\alpha : \alpha \in I\}$. Also ist $\sup\{m_\alpha : \alpha \in I\}$ eine obere Schranke von M.
Es sei nun $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $\alpha_0 \in I$, so dass $m_{\alpha_0} > \sup\{m_\alpha : \alpha \in I\} - \frac{\varepsilon}{2}$. Weiter gibt es ein $x \in M_{\alpha_0}$ mit $x > m_{\alpha_0} - \frac{\varepsilon}{2} > \sup\{m_\alpha : \alpha \in I\} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \sup\{m_\alpha : \alpha \in I\} - \varepsilon$. Damit folgt $\sup M \ge \sup\{m_\alpha : \alpha \in I\}$ und die Gleichheit $\sup M = \sup\{m_\alpha : \alpha \in I\}$ ist bewiesen.

Aufgabe T3
Entscheiden Sie jeweils (Beweis oder Gegenbeispiel), ob $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \ge n_0$ gilt:

(a) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$, (b) $|a_n| < 2\varepsilon^4$, (c) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$,

(d) $|a_n^2 + a_n| < \varepsilon$, (e) $|a_n \cdot a_{n+m}| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) *Gegenbeispiel:* Betrachte $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$|a_n + a_{n+1}| = |(-1)^n + (-1)^{n+1}| = |1 - 1| = 0,$$

die angegebene Bedingung ist also für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ schon für $n_0 = 1$ erfüllt. Trotzdem konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sicher nicht gegen Null.

(b) *Behauptung:* $(\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < 2\varepsilon^4 \ \forall n \geq n_0) \Longrightarrow a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis: Sei $\delta > 0$ beliebig und setze $\varepsilon := \sqrt[4]{\delta/2}$. Nach Voraussetzung existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - 0| = |a_n| < 2\varepsilon^4 = 2\left(\sqrt[4]{\frac{\delta}{2}}\right)^4 = \delta \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

Damit haben wir die Definition der Konvergenz nachgeprüft, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also eine Nullfolge. □

(c) *Gegenbeispiel:* Wir setzen

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n}, & n \in \mathbb{N}_0 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$|a_n \cdot a_{n+1}| = \left|1 \cdot \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

und da $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekanntermaßen eine Nullfolge ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n \cdot a_{n+1}| = 1/n < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Andererseits ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge. Um das einzusehen, nehmen wir an diese Folge würde gegen Null konvergieren. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < 1/2$ für alle $n \geq n_0$ ist. Nun gibt es aber eine gerade Zahl m, die größer als n_0 ist (z.B. muss entweder $n_0 + 1$ oder $n_0 + 2$ gerade sein). Für diese ist dann $1/2 > a_m = 1$, was ein Widerspruch ist.

(d) *Gegenbeispiel:* Wir betrachten die konstante Folge $a_n = -1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$|a_n^2 + a_n| = |(-1)^2 + (-1)| = |1 - 1| = 0,$$

so dass wie in (a) das angegebene Kriterium sogar immer mit $n_0 = 1$ erfüllt ist. Außerdem ist diese Folge natürlich keine Nullfolge, da sie gegen -1 konvergiert.

(e) *Behauptung:* $(\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n \cdot a_{n+m}| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \ \forall m \in \mathbb{N}) \Longrightarrow a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis: Wir führen einen indirekten Beweis. Dazu nehmen wir an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge ist. Was heißt das nun? Wir müssen die Aussage „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen Null“ negieren. Das geht am besten in Quantorenschreibweise. Wir wollen also folgendes negieren:

$$\forall \delta > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n| < \delta.$$

Das ergibt als Negation (aus jedem „$\forall$“ wird ein „$\exists$“ und aus jedem „$\exists$“ ein „$\forall$“, außerdem müssen wir die Ungleichung am Ende umkehren):

$$\exists \delta > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0 : |a_n| \geq \delta. \tag{1}$$

D.h. (wieder in Worten) es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n > n_0$ existiert mit $|a_n| \geq \delta$.

Betrachten wir nun die Voraussetzung, so liefert uns diese zum soeben gefundenen δ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n \cdot a_{n+m}| < \delta^2 \quad \text{für alle } n \geq N_0 \text{ und alle } m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Wegen (1) (mit $n_0 = N_0$) gibt es nun ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $k_1 \geq N_0$ und $|a_{k_1}| \geq \delta$. Verwenden wir nochmals (1), dieses mal mit $n_0 = k_1 + 1$, so erhalten wir ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $k_2 > k_1$, für das ebenfalls $|a_{k_2}| \geq \delta$ gilt. Setzen wir $m := k_2 - k_1$, so ist $m \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$|a_{k_1} \cdot a_{k_1+m}| = |a_{k_1}||a_{k_2}| \geq \delta^2,$$

was im Widerspruch zu (2) steht. (Man beachte, dass $k_1 \geq n_0$ gewählt wurde!) □