Analysis I für M, LaG/M, Ph
2.Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
22./23.04.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Körperaxiome, beschränkte Mengen)

(a) Beweisen Sie ausgehend von den Körperaxiomen (A1)–(A9) die folgende Aussage.
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Sind x, y reelle Zahlen mit $a \cdot x = b$ und $a \cdot y = b$, so gilt $x = y$.

(b) Beweisen Sie: Eine Teilmenge $M \neq \emptyset$ der reellen Zahlen ist genau dann beschränkt, wenn es $C > 0$ gibt, so dass $|x| \leq C$ für alle $x \in M$ gilt.

Aufgabe T2 (endliche Körper)

Sei K eine Menge und $+_K$, $\cdot_K$ Verknüpfungen auf K. Ersetzen Sie in den Körperaxiomen für die reellen Zahlen (A1)–(A9) $\mathbb{R}$ durch K, $+$ durch $+_K$ und $\cdot$ durch $\cdot_K$. Wenn die so erhaltenen Aussagen erfüllt sind, dann nennt man K, bzw. genauer das Tripel $(K, +_K, \cdot_K)$, einen *Körper*. Führen Sie gegebenenfalls für ein paar der Axiome diese Ersetzung durch.
Neben den reellen (und den rationalen) Zahlen gibt es noch ganz anders aussehende Objekte, welche die Körperaxiome erfüllen, darunter auch solche mit nur endlich vielen Elementen.
Seien $K_2 := \{0, 1\}$, $K_4 := \{0, 1, 2, 3\}$ Mengen. Definiere folgendermaßen Verknüpfungen $+_2$, $\cdot_2$ auf K_2 und $+_4$, $\cdot_4$ auf K_4:

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Sind beispielsweise $x, y \in K_4$, dann steht in der Zeile "x" und Spalte "y" der Tabelle für "$+_4$" das Ergebnis von $x +_4 y$.
Ist $(K_2, +_2, \cdot_2)$ ein Körper? Ist $(K_4, +_4, \cdot_4)$ ein Körper?

Aufgabe T3 (angeordnete Körper)

Sei K eine Menge, $+_K$, $\cdot_K$ Verknüpfungen und $\leq_K$ eine Relation auf K. Ersetzen Sie in den Anordnungsaxiomen für die reellen Zahlen (A10)–(A14) $\mathbb{R}$ durch K, $+$ durch $+_K$, $\cdot$ durch $\cdot_K$ und $\leq$ durch $\leq_K$. Wenn die so erhaltenen Aussagen erfüllt sind, dann nennt man K, bzw. genauer das Quadrupel $(K, +_K, \cdot_K, \leq_K)$, einen *angeordneten Körper*.
Gibt es auf K_2 eine Relation $\leq_2$, so dass $(K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ ein angeordneter Körper ist?

Für Interessierte: Erkennen Sie ein "Prinzip" hinter den Tabellen zu den Verknüpfungen $+_2$, $+_4$, $\cdot_2$, $\cdot_4$? Wie sähen die Tabellen für $+_3$ und $\cdot_3$ auf $K_3 := \{0, 1, 2\}$ aus? Ist $(K_3, +_3, \cdot_3)$ ein Körper? Finden Sie eine "große" Teilmenge A von $\mathbb{N}$, so dass $(K_n, +_n, \cdot_n)$ für alle $n \in A$ kein Körper ist? Gibt es $n \in \mathbb{N}$ und eine Relation $\leq_n$ auf K_n, so dass $(K_n, +_n, \cdot_n, \leq_n)$ ein angeordneter Körper ist?
In den Algebra-Vorlesungen werden Sie mehr über endliche Körper erfahren.