Analysis I für M, LaG/M, Ph
1.Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
15./16.04.2010

Tutorium

Aufgabe T1 (Abbildungen)
Seien B die Bücher der Mathematik-Bibliothek und P die Menge der Personen, die Bücher ausleihen dürfen. Wir definieren eine „Vorschrift" e, durch $e(b) = p$, falls die Person $p \in P$ das Buch $b \in B$ ausgeliehen hat.
Diskutieren Sie in der Gruppe:

- Wie sieht der maximale Definitionsbereich von e aus?
- Wieso definiert e eine Abbildung auf dem beschriebenen Definitionsbereich?
- Wie sieht der Wertebereich von e aus?
- Wann ist e injektiv, wann surjektiv?
- Wie könnte man erreichen, dass e für alle $b \in B$ sinnvoll definiert ist?

Lösung: Die Vorschrift e lässt sich auf der Menge $D(e) := \{b \in B : \text{Buch } b \text{ ist ausgeliehen}\}$ definieren. Dadurch wird e zu einer Abbildung, da *jedem* Buch aus $D(e)$ genau eine Person zugeordnet wird. Ein Buch kann ja nur von höchstens einer Person ausgeliehen werden.
Der Wertebereich ist dann gegeben durch

$$W(e) = \{p \in P : \text{Person } p \text{ hat mindestens ein Buch ausgeliehen}\}.$$

Die Funktion e ist injektiv, wenn keine Person zwei oder mehr Bücher ausgeliehen hat. Das heißt, es gibt keine zwei verschiedenen Bücher, die den gleichen Funktionswert haben. Die Funktion e ist surjektiv, wenn jede Person aus der Menge P mindestens ein Buch ausgeliehen hat.
Damit e für alle Bücher der Bibliothek definiert ist, kann man zum Beispiel der Wertemenge P ein weiteres Element hinzufügen. Es bezeichne dazu m die Mathematikbibliothek. Wir erweitern e durch die Definition $e(b) := m$, falls keine Person das Buch ausgeliehen hat. Sozusagen hat dann die Bibliothek selbst das Buch „entliehen". Damit ist e auf ganz B sinnvoll definiert.

Aufgabe T2 (Mengen und Aussagen)
Es seien $M_{ij} \subset M$ für $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$.

(a) Zeigen Sie

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} M_{ij} \subset \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} M_{ij}.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel an mit $\bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} M_{ij} \neq \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} M_{ij}$.

Lösung:

(a) *Behauptung:* $\bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} M_{ij} \subset \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} M_{ij}$
Beweis: Sei $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} M_{ij}$.

$\Rightarrow$ es gibt ein $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ so dass $x \in \bigcap_{j=1}^{m} M_{i_0 j}$
$\Rightarrow$ $x \in M_{i_0 j}$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\Rightarrow\ x \in \bigcup_{i=1}^{n} M_{ij} \text{ für alle } j \in \{1,\dots,m\}$$
$$\Rightarrow\ x \in \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} M_{ij}$$

□

(b) Setze $n = m = 2$ und $\{a\} = M_{11} = M_{21}$ und $\{b\} = M_{12} = M_{22}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m} M_{ij} &= (M_{11} \cap M_{12}) \cup (M_{21} \cap M_{22})\\ &= \emptyset \cup \emptyset\\ &= \emptyset,\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}\bigcap_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n} M_{ij} &= (M_{11} \cup M_{12}) \cap (M_{21} \cup M_{22})\\ &= \{a,b\} \cap \{a,b\}\\ &= \{a,b\}\\ &\neq \emptyset.\end{aligned}$$

□

Aufgabe T3 (Aussagen)
Sie haben gelernt, dass zwei Aussagen p und q äquivalent sind, wenn sie gleichzeitig war oder gleichzeitig falsch sind. Aus den beiden Aussagen wird also die neue Aussage $p \Leftrightarrow q$.

(a) Schreiben Sie die Definition von $p \Leftrightarrow q$ als Wahrheitstafel.
(b) Schreiben Sie die Definition der Äquivalenz als formale Aussage mittels der Symbole p, q, *und*, *oder* und *nicht*.
(c) Beweisen Sie die Aussage aus b) mittels einer Wahrheitstafel.

Lösung:

(a) Aus dem Skript ergibt sich sofort

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

(b) $p \Leftrightarrow q$ bedeutet formal aufgeschrieben:

$$(p \text{ und } q) \quad \text{oder} \quad (\text{nicht } p \text{ und nicht } q)$$

(c)

p	q	nicht p	nicht q	p und q	nicht p und nicht q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	w	w

Aufgabe T4 (Aussagen)

(a) Was ist die intuitive Bedeutung der folgenden Aussage:

$$(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad ((p \Rightarrow q) \text{ und } (q \Rightarrow p))$$

(b) Beweisen Sie es mittels Wahrheitstafel.

Lösung:

(a) p ist äquivalent zu q genau dann, wenn q aus p folgt und p aus q folgt.

(b)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow p$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q)$ und $(q \Rightarrow p))$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w