Lineare Algebra 2
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
29. Juni - 01. Juli 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

a) Finden Sie eine komplexe Matrix in Jordanscher Normalform, die -1 als einzigen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 hat.

b) Finden Sie eine komplexe Matrix in Jordanscher Normalform, die die folgenden Eigenwerte hat:

1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1,
2 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 3,
5 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 2.

c) Finden Sie Matrizen in Jordanscher Normalform, die ähnlich zu den folgenden Matrizen sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie die verallgemeinerten Eigenräume der Matrizen aus c).

Aufgabe G2

a) Bestimmen Sie eine Jordanbasis für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G3

Es seien $A_1, A_2, \cdots, A_8 \in M_5(\mathbb{C})$ komplexe 5×5-Matrizen, die alle den Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ haben und keinen weiteren. Zeigen Sie, dass mindestens zwei der Matrizen $A_1, A_2, \cdots, A_8$ zueinander ähnlich sind.

Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz über die Jordansche Normalform.

Aufgabe G4

Zeigen Sie: Der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring.

Hausübung

Aufgabe H35

Bestimmen Sie eine Jordanbasis für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H36
Sei V ein Vektorraum und $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ eine Folge von Untervektorräumen. Zeigen Sie:

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$$

ist ein Untervektorraum von V.
Folgern Sie, dass der verallgemeinerte Eigenraum $V^\lambda(\varphi)$ eines Endomorphismus $\varphi : V \to V$ zum Eigenwert λ (wie in der Vorlesung definiert) tatsächlich ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe H37
Sei $\varphi : R \to S$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen, d.h. für alle $q, r \in R$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(q+r) &= \varphi(q) + \varphi(r) \\ \varphi(q \cdot r) &= \varphi(q) \cdot \varphi(r). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\ker(\varphi) := \left\{ r \in R \,\middle|\, \varphi(r) = 0 \right\}$$

ein Ideal von R ist.