Lineare Algebra 2
11. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
22.–24. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Wir betrachten den reellen Vektorraum V der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass $\det : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form ist.

b) Bestimmen Sie die Matrix der assoziierten Bilinearform bezüglich der Basis

$$B = \left(B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

c) Bestimmen Sie die Hauptachsen und skizzieren Sie die Mengen

$$\{u \in V : \det u = 1\}, \quad \{u \in V : \det u = -1\}$$

(als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, wenn jede Matrix mit ihren Koordinaten bezüglich obiger Basis identifiziert wird).

Aufgabe G2

a) Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit oder indefinit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ positiv, für welche Werte negativ definit?

Aufgabe G3
Gilt analog zum Kriterium für positive Definitheit (Satz 10.4.7) auch folgendes Kriterium?
Eine reelle symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn für alle Hauptminoren A_r mit $r = 1, \cdots, n$ gilt $\det A_r \geq 0$.

Aufgabe G4
Es sei $B \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = B^T B$ symmetrisch und positiv semidefinit ist. In dem Fall, dass B invertierbar ist, ist A sogar positiv definit.

Hausübung

Aufgabe H32
Betrachten Sie den Kegel

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \right\}$$

in $\mathbb{R}^3$, sowie die affin-lineare Einbettung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2$ für $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$.
Untersuchen Sie die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x) \in C \right\}$$

für

a) $u_0 = e_3,\ u_1 = e_1,\ u_2 = e_2$
b) $u_0 = e_1,\ u_1 = e_2,\ u_2 = e_3$
c) $u_0 = e_3,\ u_1 = e_2,\ u_2 = e_1 + e_3$
d) $u_0 = 0,\ u_1 = e_1 + e_3,\ u_2 = e_1 - e_3$

Zeigen Sie: Es handelt sich um einen Kreis, eine Hyperbel, eine Parabel, zwei sich schneidende Geraden.
Skizzieren Sie die Mengen C und $f(\mathbb{R}^2)$ jeweils.

Aufgabe H33
Zeigen Sie, dass zu einer symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$ existiert, für die $A = P^2$ gilt. Ist A sogar positiv definit, so auch P.

Aufgabe H34
Gegeben sei die reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & & b \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & & b & a \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, für welche A_n positiv, bzw. negativ definit ist.

Fussballspiel

Habt ihr Lust den Mitarbeitern zu zeigen, dass ihr auch auf dem Fussballfeld richtig was zu bieten habt?
Dann nutzt die Chance beim Spiel "Mitarbeiter vs. Studenten" am 08. Juli um 16:00 Uhr.
Weitere Infos und Anmeldelisten liegen im 2. Stock des S2|15 aus.