

# Lineare Algebra 2

## 10. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. A. Kollross  
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010  
15.–17. Juni 2010

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1

Finden Sie eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , die keine quadratische Form ist.

#### Aufgabe G2

Gegeben sei die Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und den Typ der Quadrik.

#### Aufgabe G3

Sei  $x \in \mathbb{R}^2$ .

- a) Zeichnen Sie eine Skizze der Punkte, die die Gleichung

$$x_1x_2 = 1$$

erfüllen. Ist dies eine Quadrik? Was ist die quadratische Form?

- b) Welche Gleichung erhält man, wenn man  $x_1 = x'_1 + x'_2$  und  $x_2 = x'_1 - x'_2$  substituiert?  
c) Welcher Basistransformation entspricht diese Substitution?

### Hausübung

#### Aufgabe H29

Gegeben sei die Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 = 1\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und den Typ der Quadrik.

#### Aufgabe H30

Es sei das einschalige Hyperboloid

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1 \right\}$$

im  $\mathbb{R}^3$  gegeben.

Zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von H genau zwei Geraden verlaufen, die ganz in H enthalten sind.

#### Aufgabe H31

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine quadratische Hyperfläche, d.h. es gilt  $S = Q^{-1}(\{1\})$  für eine quadratische Form  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Sei A die Matrix der zugehörigen symmetrischen Bilinearform.

- a) Zeigen Sie: Jede orthogonale Abbildung  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die die Eigenräume von A invariant lässt, bildet S auf S ab.  
b) Nutzen Sie dies, um zu zeigen, dass H wie in Aufgabe (H30) rotationssymmetrisch ist.