Lineare Algebra 2
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
8.–10. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Warum gibt es eine unitäre Matrix Q, so dass für

$$A := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $t = \frac{\pi}{2}$ die Matrix $A' = Q^{-1} A\, Q$ eine Diagonalmatrix ist?
Geben Sie diese Matrix Q an und berechnen Sie A'.

Aufgabe G2
Beweisen Sie den Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen, indem Sie den Beweis des Hauptsatzes über normale Matrizen aus der Vorlesung entsprechend abwandeln. Zeigen Sie also mittels Induktion, dass zu jeder symmetrischen Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren im $\mathbb{R}^n$ existiert.

Aufgabe G3

a) Sei $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\right\}$ die Einheitssphäre um den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: Mit der Definition

$$d\left(x, y\right) := \|x - y\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, wird S zu einem metrischen Raum.
Hinweis: Statt einzeln die Axiome eines metrischen Raumes nachzuweisen, überlegen Sie sich einfach, warum hier eigentlich nichts zu beweisen ist.

b) Zeigen Sie: Für $x, y \in S$ gilt

$$d\left(x, y\right) = 2 \sin\left(\frac{\measuredangle(x, y)}{2}\right).$$

c) Zeigen Sie den Satz vom Fußball: Wenn bei einem Fußballspiel der Ball zum Anfang der ersten und der zweiten Halbzeit auf den Anstoßpunkt gelegt wird, gibt es mindestens zwei Punkte auf dem Ball, die an der selben Stelle liegen.

Hausübung

Aufgabe H26
Warum gibt es eine unitäre Matrix Q, so dass für

$$A := \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & i & i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

die Matrix $A' = Q^{-1} A\, Q$ eine Diagonalmatrix ist?
Geben Sie diese Matrix Q an und berechnen Sie A'.

Aufgabe H27

Gegeben seien $F, G \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ und $G(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$. Zeigen Sie, dass $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto F(x) \cdot G(y)$ eine Bilinearform ist und bestimmen Sie die Matrix von s bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe H28

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $F :\ V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform.

a) Zeigen Sie, dass sich F analog zum Fall einer Bilinearform durch eine Matrix $[F]_B \in M_n(\mathbb{C})$ beschreiben lässt. Finden Sie die Transformationsformel für einen Basiswechsel.

b) Zeigen Sie: Ist F hermitesch, d.h. gilt $F(u, w) = \overline{F(w, u)}$, so lässt sich F durch eine geeignete Wahl einer Basis B in der Form

$$[F]_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

darstellen.