Lineare Algebra 2
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
1.–3. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Die Summe zweier orthogonaler Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.
- ☐ Das Produkt zweier unitärer Matrizen ist wieder eine unitäre Matrix.
- ☐ Das Produkt zweier hermitescher Matrizen ist wieder hermitesch.
- ☐ Die Summe zweier schiefsymmetrischen Matrizen ist wieder schiefsymmetrisch.
- ☐ Die Summe zweier normaler Matrizen ist wieder normal.
- ☐ Das Produkt zweier symmetrischer Matrizen ist wieder symmetrisch.

Aufgabe G2 (Minitest)
Welche der folgenden Matrizen sind symmetrisch, schiefsymmetrisch, hermitesch, schiefhermitesch?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+i & 5 \\ 5 & 1-i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -i & & \\ & \ddots & \\ & & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

Aufgabe G3

(a) Bestimmen Sie alle komplexen $n \times n$-Matrizen, die symmetrisch und schiefhermitesch sind.

(b) Bestimmmen Sie alle reellen 2×2-Matrizen, die orthogonal und symmetrisch sind.

Aufgabe G4
Betrachten Sie den unitären Vektorraum $M_2(\mathbb{C})$ mit dem Spur-Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(B^* A)$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $M_2(\mathbb{C})$, welche die folgende Matrix enthält:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G5

(a) Sei A eine komplexe $n \times m$-Matrix und B eine komplexe $m \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass genau dann $B = A^*$, wenn für alle $x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$ bzgl. des Standardskalarproduktes gilt

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle .$$

(b) Zeigen Sie: Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann normal, wenn $\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^* x, A^* y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt.

Hausübung

Aufgabe H23
Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix Q an, so dass die Matrix $Q^T AQ$ diagonal ist und berechnen Sie $Q^T AQ$.

Aufgabe H24
Betrachte den euklidischen Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ aller $n \times n$-Matrizen mit Spur-Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(B^T A)$. Bezeichne mit $U_+ \subseteq M_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der symmetrischen und $U_- \subseteq M_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der schiefsymmetrischen Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass U_+ und U_- lineare Teilräume sind und dass $(U_+)^\perp = U_-$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eindeutig als Summe $A = A_+ + A_-$ aus einer symmetrischen Matrix A_+ und einer schiefsymmetrischen Matrix A_- schreiben lässt.

(c) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion π_+ auf den Teilraum U_+ und π_- auf den Teilraum U_-.

Aufgabe H25
Zeigen Sie, dass für eine reelle $n \times n$-Matrix P die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Es gilt $P^2 = P = P^T$.

(b) Die Matrix P ist symmetrisch und hat keine von 0 und 1 verschiedenen Eigenwerte.

(c) Die durch P gegebenen lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Px$ ist eine orthogonale Projektion.

Hinweis: Auf welchen Teilraum projiziert P?