Lineare Algebra 2
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
25.–27. Mai 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonale Matrizen?

$$(1)\,, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{-12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie alle reellen, oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen, die orthogonal sind.

Aufgabe G2

Seien V, W zwei euklidische Vektorräume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. Zeigen Sie, dass auf dem direkten Produkt $V \times W$ ein Skalarprodukt gegeben ist durch

$$\big\langle (v_1, w_1), (v_2, w_2) \big\rangle := \langle v_1, v_2 \rangle_V + \langle w_1, w_2 \rangle_W \,.$$

Aufgabe G3

Betrachten Sie $\mathbb{R}^5$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie einen Basis des Orthogonalraumes $U^\perp$ zu dem linearen Teilraum U, der von den folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$(1,2,3,0,0)^T\,, \qquad (0,0,0,0,1)^T\,, \qquad (1,0,2,0,1)^T\,, \qquad (0,4,2,0,0)^T\,.$$

Aufgabe G4

Betrachten Sie $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Zeigen Sie:

(a) Jedes Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^n$ lässt sich zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ ergänzen.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Teilraum und $\pi : V \to V$ die orthogonale Projektion auf U. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^n$, so dass die Matrix von π bzgl. $\mathscr{B}$ die folgende Gestalt hat:

$$[\pi]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Zu je zwei Einheitsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine orthogonale Matrix $Q \in O_n(\mathbb{R})$ mit $Qv = w$.[1]
Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $v = e_1$.

[1] D.h. die Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ wirkt transitiv auf der Einheitssphäre $S := \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$.

Hausübung

Aufgabe H20
Es sei V ein euklidischer Raum $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Ist φ längentreu, so ist φ winkeltreu, d.h. für je zwei Vektoren $0 \neq \mathsf{v}, w \in V$ ist der Winkel zwischen diesen Vektoren gleich dem zwischen ihren Bildvektoren $\varphi(\mathsf{v}), \varphi(w)$. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Aufgabe H21 (Spiegelung an einer Hyperebene)
Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $\mathsf{v} \in V$ ein Einheitsvektor. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\sigma_{\mathsf{v}} : V \to V, \quad x \mapsto x - 2\langle x, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v} .$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung σ_{v} ist eine orthogonale Abbildung.

(b) Der von v aufgespannte Teilraum $\mathbb{R}\mathsf{v}$ ist der Eigenraum von σ_{v} zum Eigenwert -1 und sein Orthogonalraum der Eigenraum zum Eigenwert 1.

Seien nun $\mathsf{v}, w \in V$ zwei Einheitsvektoren. Bezeichne U den von v und w aufgespannten linearen Teilraum. Betrachten Sie die linearen Abbildungen σ_{v} und σ_w. Zeigen Sie:

(c) Der Teilraum U ist σ_{v}-invariant und σ_w-invariant, d.h. es gilt $\sigma_{\mathsf{v}}(U) \subseteq U$ und $\sigma_w(U) \subseteq U$.

(d) Für alle $x \in U^{\perp}$ gilt $\sigma_{\mathsf{v}}(x) = x = \sigma_w(x)$.

(e) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   i. Die Vektoren v und w sind linear abhängig oder orthogonal zueinander.
   ii. Die Abbildungen σ_{v} und σ_w kommutieren, d.h. $\sigma_{\mathsf{v}} \circ \sigma_w = \sigma_w \circ \sigma_{\mathsf{v}}$.

Aufgabe H22
Sei V ein euklidischer Vektorraum mit einer abzählbar unendlichen Basis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass es eine abzählbar unendliche Orthonormalbasis von V gibt, d.h. es gibt eine Basis $(\mathsf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von V mit $\left\langle \mathsf{v}_i, \mathsf{v}_j \right\rangle = \delta_{i,j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.