# Lineare Algebra 2
# 6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. A. Kollross**
K. Schwieger, T. Felber

**Sommersemester 2010**
**18.–20. Mai 2010**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1**
Betrachte $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und die folgenden Vektoren:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis des Untervektorraumes $U$, der von den Vektoren $b_1, \dots, b_4$ aufgespannt wird.

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $x := (1, 1, 1, 1)^T$ auf den linearen Teilraum $U$.

**Aufgabe G2**
Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sowohl durch die zwei Vektoren

$$b_1^+ := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad b_2^+ := \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

als auch durch die zwei Vektoren

$$b_1^- := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad b_2^- := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

eine Orthonormalbasis gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ von der Form (1) oder (2) ist.

**Aufgabe G3**
Betrachte $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $x = (x_1, \dots, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ein beliebiger Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bilden:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_4 \\ -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe G4** (Hadamard-Matrizen, ein offenes Problem)
Das folgende Problem ist noch immer offen bzw. nur unvollständig gelöst. Versuchen Sie sich doch einmal an der Lösung: Für welche Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Orthogonalbasis (Basis aus orthogonalen Vektoren) von $\mathbb{R}^n$, die nur aus Vektoren mit den Einträgen $+1$ und $-1$ besteht?[1]

[1] Eine aus solchen Vektoren bestehende Matrix nennt man auch *Hadamard-Matrix*, benannt nach dem französischen Mathematiker Jacques S. Hadamard.

## Hausübung

**Aufgabe H17**

Finden Sie eine Orthonormalbasis des folgenden linearen Teilraums von $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt:

$$U := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} .$$

**Aufgabe H18**

Betrachte $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ den Raum der reellen Polynomfunktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis des Unterraumes, der von den Funktionen $p_0, p_1, p_2, p_3$ mit $p_k(x) := x^k$ aufgespannt wird.

Die so erhaltenen Polynome heißen diese Polynome (bis auf Normierung) *Legendre-Polynome*.

(b) Wir bezeichnen mit $U \subseteq V$ den von den Polynomen $p_0, p_1, p_2$ aufgespannten linearen Teilraum. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $p_4(x) := x^4$ auf den Teilraum $U$.

**Aufgabe H19**

Sei $V$ der Vektorraum der komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bei denen nur endlich viele $a_n$ von Null verschieden sind. Wir definieren ein Skalarprodukt auf $V$ durch

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{b_n} .$$

(a) Zeigen Sie, dass $V$ mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein unitärer Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge von $V$ ein echter linearer Teilraum ist:

$$U := \left\{ (a_n)_n \in V \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0 \right\} .$$

(c) Bestimmen Sie den Orthogonalraum $U^\perp$. *Hinweis:* Können Sie ein paar „einfache“ Vektoren in $U$ finden?