Lineare Algebra 2
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
11.–13. Mai 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ähnlichkeit)
Welche der folgenden Matrizen sind zueinander ähnlich?

$$A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_5 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A_7 := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_9 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2 (Polarisationsformel)
Sei V ein komplexer Vektorraum und $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie, dass dann für alle $\mathsf{v}, w \in V$ gilt

$$\langle \mathsf{v}, w \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\| \mathsf{v} + i^k w \right\|^2 .$$

Aufgabe G3
Betrachten Sie den Vektorraum $V := \mathbb{R}[t]$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Wir betrachten auf $\mathbb{R}[t]$ die Ableitung

$$\varphi : V \longrightarrow V, \quad p \mapsto p' ,$$

wobei die Ableitung eines Polynoms $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ wie üblich durch $p'(t) := \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k t^{k-1}$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass es kein Polynom $0 \neq Q \in \mathbb{R}[t]$ mit $Q(\varphi) = 0$ gibt.

Hausübung

Aufgabe H14 (Ähnlichkeit von 2×2-Matrizen)
Zeigen Sie, dass für zwei komplexe 2×2-Matrizen A, B die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Matrizen A und B sind ähnlich.

(b) Das Minimalpolynom von A und B sind gleich.

Zusatzaufgabe: Gilt diese Äquivalenz auch für reelle 2×2-Matrizen?

Aufgabe H15 (Gleichheit bei Cauchy-Schwarz)
Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass für alle Vektoren $\mathsf{v}, w \in V$ die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathsf{v}, w \rangle| \leq \|\mathsf{v}\| \cdot \|w\|$$

gilt. Zeigen Sie, dass bei dieser Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, d.h. $|\langle \mathsf{v}, w \rangle| = \|\mathsf{v}\| \cdot \|w\|$, wenn v und w linear abhängig sind.

Aufgabe H16 (Komplexifizierung euklidischer Räume)
Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir betrachten den reellen Vektorraum $V_{\mathbb{C}} := V \times V$ und definieren eine komplexe Skalarmultiplikation auf $V_{\mathbb{C}}$ durch

$$(x + iy) \cdot (\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2) := (x \cdot \mathsf{v}_1 - y \cdot \mathsf{v}_2, x \cdot \mathsf{v}_2 + y \cdot \mathsf{v}_1)$$

für $(\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2) \in V_{\mathbb{C}}$ und $x, y \in \mathbb{R}$, d.h. $x + iy \in \mathbb{C}$ (ohne Nachweis, vgl. 9. Tutorium im letzten Semester).
Mit dieser Skalarmultiplikation wird $V_{\mathbb{C}}$ zu einem komplexen Vektorraum. Zeigen Sie, dass durch

$$\left\langle (\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2), (\mathsf{v}_1', \mathsf{v}_2') \right\rangle_{\mathbb{C}} := \left\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_1' \right\rangle - i \left\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2' \right\rangle + i \left\langle \mathsf{v}_2, \mathsf{v}_1' \right\rangle + \left\langle \mathsf{v}_2, \mathsf{v}_2' \right\rangle .$$

ein hermitesches Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{C}}$ definiert ist, d.h. $V_{\mathbb{C}}$ ist mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ ein unitärer Vektorraum.