Lineare Algebra 2
4. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
4.–6. Mai 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Nehmen Sie zu folgendem „Beweis“ des Satzes von Cayley-Hamilton Stellung:

$$p_A(A) = \det(A - A \cdot E) = \det(A - A) = \det(0) = 0 \,.$$

Aufgabe G2 (Trigonalisieren)
Bestimmen Sie eine obere Dreiecksmatrix, die ähnlich zur folgenden Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe G3 (Invarianten unter Ähnlichkeit)

(a) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen die gleiche Determinante, die gleiche Spur und das gleiche charakteristische Polynom haben.

(b) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen das gleiche Minimalpolynom haben.

(c) Finden Sie jeweils zwei 3×3-Matrizen mit gleicher Determinante / gleicher Spur / gleichem charakteristischem Polynom / gleichem Minimalpolynom, die nicht ähnlich sind.

Aufgabe G4

(a) Sei A eine 2×2-Matrix. Schreiben Sie das charakteristische Polynom von A mit Hilfe der Determinante und der Spur von A.

(b) Schreiben Sie A^2 als Linearkombination von A und E.

(c) Sei nun A eine $n \times n$-Matrix. Wie groß kann der von den Potenzen $E, A, A^2, \dots$ aufgespannte lineare Teilraum von $M_n(\mathbb{K})$ höchstens werden?

Hausübung

Aufgabe H11
Bestimmen Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen mit komplexen Einträgen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe H12
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Sei $X \in M_{n+m}(\mathbb{K})$ = eine obere Block-Dreiecksmatrix

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

mit Untermatrizen $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass für die jeweiligen charakteristischen Polynome P_X, P_A und P_B gilt:

$$P_X(t) = P_A(t) \cdot P_D(t)\,.$$

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom:

$$A_1 := \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

(c) Verallgemeinert sich die Aussage aus (a) über charakteristische Polynome auch auf Minimalpolynome?

Aufgabe H13 (Nilpotente Matrizen)
Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt *nilpotent*, falls es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Für eine nilpotente $n \times n$-Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ gilt $A^n = 0$ (mit gleichem n).

(b) Eine komplexe Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist genau dann nilpotent, wenn sie außer Null keine weiteren Eigenwerte besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass jede nilpotente Matrix zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix ähnlich ist.