Lineare Algebra 2
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
27.-29. April 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Sei $p(t) := \sum_{k=0} a_k t^k$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Besitzt p eine ganzzahlige Nullstelle $\lambda \in \mathbb{Z}$, so ist λ ein Teiler von a_0, d.h. es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 = \lambda q$.
Hinweis: Betrachten Sie die Polynomdivision durch $(t - \lambda)$.

(b) Bestimmen Sie mittels Polynomdivision für das folgende Polynom alle Nullstellen und ihre Vielfachheiten:

$$p(t) := t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1 \, .$$

Hinweis: Das Polynom besitzt nur ganzzahlige Nullstellen.

Aufgabe G2

Sei A eine Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass die geometrische Vielfachheit von λ kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit von λ ist.

Aufgabe G3 (Eigenwerte der Ableitung)

Wir bezeichnen mit $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Machen Sie sich klar, dass $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von D ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Exponentialfunktion.

(c) Machen Sie sich klar, dass die Menge aller Polynomfunktionen $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein linearer Teilraum von $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie $D(\mathscr{P}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, d.h. die Abbildung D lässt sich auf den Teilraum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ einschränken.

Finden Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der eingeschränkten Abbildung $D|_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R}), p \mapsto p'$.

Hausübung

Aufgabe H8
Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom, die komplexen Eigenwerte mit zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Welche der Matrizen können Sie über $\mathbb{R}$ diagonalisieren, welche über $\mathbb{C}$?

Aufgabe H9 (Fibonacci-Zahlen)
Wir definieren rekursiv eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen durch

$$f_1 := f_2 := 1, \qquad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}.$$

Die so konstruierten Zahlen f_n heißen *Fibonacci*-Zahlen.

(a) Berechnen Sie die ersten 8 Fibonacci-Zahlen.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n := (f_n, f_{n+1})^T \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie eine 2×2-Matrix A mit

$$x_{n+1} = A x_n.$$

Mit vollständiger Induktion folgt dann $x_n = A^{n-1} x_1$ (ohne Beweis). Insbesondere ist die Fibonacci-Zahl f_n der erste Eintrag des Vektors $A^{n-1} x_1$.

(c) Bestimmen Sie eine explizite Formel für die n-te Fibonacci-Zahl, indem Sie die Potenzen A^n bestimmen.

Aufgabe H10 (Translation reeller Funktionen)
Sei $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}$ fix. Betrachten Sie den linearen Endomorphismus $S : \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, der gegeben ist durch

$$(Sf)(x) := f(x + x_0).$$

(a) Machen Sie sich klar, dass sich S auf den linearen Teilraum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen einschränken lässt (ohne Beweis). Zeigen Sie, dass die konstanten Funktionen die einzigen Eigenvektoren der eingeschränkten Abbildung $S|_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass jede strikt positive, reelle Zahl $\lambda > 0$ ein Eigenwert von S ist.

(c*) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von $S : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist.