Lineare Algebra 2
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
20.-22. April 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Eigenvektoren sind linear unabhängig.
- ☐ Eigenvektoren zum selben Eigenwert sind linear abhängig.
- ☐ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(b) Betrachten Sie die folgenden Polynome $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{K}[t]$ über dem Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:

$$p_1(t) := t^2 + 1\,, \qquad p_2(t) := (t+1)^2\,, \qquad p_3(t) := t + 1$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Alle Polynome sind gleich.
- ☐ Die Polynome p_1 und p_2 sind gleich.
- ☐ Keine zwei Polynome sind gleich.

(c) Betrachten Sie die folgenden Polynomfunktionen $q_1, q_2, q_3 : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ auf dem Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:

$$q_1(x) := x^2 + 1\,, \qquad q_2(x) := (x+1)^2\,, \qquad q_3(x) := x + 1$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Alle Funktionen sind gleich.
- ☐ Die Funktionen q_1 und q_2 sind gleich.
- ☐ Keine zwei Funktionen sind gleich.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\,, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe G3

(a) Sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A auch ein Eigenwert der transponierten Matrix A^T ist. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenräume im Allgemeinen nicht übereinstimmen.

(b) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit komplexen Einträgen. Wie hängen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit den Eigenwerten und Eigenvektoren der komplex konjugierten Matrix $\bar{A}$ zusammen?

Aufgabe G4

Sei $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ durch ein Polynom 2. Grades realisiert werden kann, d.h. es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$ mit $p(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ mit $f(x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$.

Hausübung

Aufgabe H5

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathscr{C}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass die Matrix von φ die folgende Gestalt hat:

$$[\varphi]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H6

Sei $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie alle 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$, die keine Eigenwerte haben.

Aufgabe H7

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}, \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B^T.$$

Aufgabe H8

(a) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ den Eigenwert 1 hat. Sei $\mathsf{v} \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor von φ^2, der kein Eigenvektor von φ ist. Zeigen Sie, dass φ die Eigenwerte 1 und -1 hat.

(b) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass -1 ein Eigenwert von $\varphi^2 + \varphi$ ist. Zeigen Sie, dass φ^3 den Eigenwert 1 hat.