Lineare Algebra
1. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
bis 21./22. April 2010

Die Aufgaben im Teil „*Einleitung und Wiederholung*“ empfehlen wir Ihnen zur Wiederholung von Determinanten und zur Klärung der Begriffe aus den ersten Vorlesungen. Die Aufgaben im Teil „*Hausaufgaben*“ können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 21. bzw. 22. April 2010 zur Korrektur abgeben.

I Einleitung und Wiederholung

Aufgabe 1 Minitest

a) Sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V und sei λ ein Eigenwert von φ. Dann gilt:

- □ Die Abbildung $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ ist nicht injektiv.
- □ $\det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$.
- □ Die Abbildung $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ ist nicht surjektiv.
- □ $\ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) = \{0\}$.

b) Sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und $0 \neq \mathsf{v} \in V$ ein Vektor mit $\varphi(-\mathsf{v}) = \lambda \mathsf{v}$. Dann ist

- □ v ein Eigenwert von φ.
- □ $1/\lambda$ ein Eigenwert von φ.
- □ λ ein Eigenwert von φ.
- □ v ein Eigenvektor von φ.
- □ $-\lambda$ ein Eigenwert von φ.
- □ $-\mathsf{v}$ ein Eigenvektor von φ.

c) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren von A?

□ $(1,1)^T$, □ $(0,0)^T$, □ $(1,-1)^T$, □ $(1,2)^T$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} , \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer Diagonalmatrix genau die Diagonaleinträge sind. Was sind die zugehörigen Eigenvektoren?

Aufgabe 4

Sei v ein Eigenvektor einer Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie:

a) Ist A invertierbar, so gilt $\lambda \neq 0$ und v ist ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

b) Für jeden Skalar μ ist v ein Eigenvektor von $A - \mu E$ zum Eigenwert $\lambda - \mu$.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist v ein Eigenvektor von A^n zum Eigenwert λ^n.

II Hausaufgaben

Aufgabe 1 Berechnung von Determinanten

Berechnen Sie für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Determinante der folgenden $n \times n$-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

b) Finden Sie damit eine invertierbare Matrix S, so dass $D := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

c) Berechnen Sie A^{13}.

Aufgabe 3

Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\varphi^2 = \varphi$.

a) Zeigen Sie, dass φ nur Eigenwerte 0 und 1 haben kann.

b) Wieviele Endomorphismen $\varphi : V \to V$ mit $\varphi^2 = \varphi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 0 haben.

c) Wieviele Endomorphismen $\varphi : V \to V$ mit $\varphi^2 = \varphi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 1 haben.