Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Klausur „Probeklausur Lineare Algebra II“

Name: .... | Vorname: ....

Matrikelnummer: .... | Fachrichtung: ....

Fachsemester: ....

Beachten Sie: Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes direkt und in deutlich lesbaren Druckbuchstaben aus. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und nummerieren Sie diese fortlaufend. Am Ende der Klausur bitte das Aufgabenblatt in der Mitte so falten, dass der Kopf oben ist, die Lösungsblätter einlegen und persönlich abgeben.
Als Hilfsmittel dürfen sämtliche Bücher, Skripten und eigene Aufzeichnungen benutzt werden.
Bitte geben Sie zu jeder Lösung eine Begründung an, denn der Großteil der Punkte wird für den Lösungsweg vergeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60	
erreichte Punktzahl								

1. Aufgabe (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden komplexen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie jeweils eine Matrix in Jordanscher Normalform, die ähnlich zu A, zu B und zu C ist.

c) Welche der Matrizen A, B und C sind zueinander ähnlich? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Aufgabe (10 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen von Grad höchstens 2.

a) Zeigen Sie, dass V mit der Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{2} f(i)g(i)$$

ein euklidischer Vektorraum ist.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich des in a) gegebenen Skalarprodukts.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix P, so dass $P^T AP$ diagonal ist und berechnen Sie $P^T AP$.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Es sei die quadratische Form

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

gegeben. Bestimmen Sie die Hauptachsen der Quadrik $Q(x) = 1$ und skizzieren Sie sie bezüglich einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$.

5. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie eine Basis, bezüglich derer die nilpotente Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordansche Normalform hat und geben Sie das Minimalpolynom an.

6. Aufgabe (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen. Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Wenn $f(-x) = \lambda x$ für ein $0 \neq x \in V$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, dann sind x und $-x$ Eigenvektoren zum Eigenwert $-\lambda$.

b) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}$$

ist diagonalisierbar.

c) Die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Standard-Skalarprodukts im $\mathbb{C}^2$.

d) Eine komplexe $n \times n$-Matrix, die nur den Eigenwert null hat, ist nilpotent.

e) Die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist ähnlich zu einer reellen Matrix in Jordannormalform.