Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2010

Klausur
„Lösungshinweise zur Probeklausur Lineare Algebra II“

In dieser Lösungsskizze sind teilweise nur die Ergebnisse notiert. Bitte beachten Sie, dass Sie in der Klausur alle Lösungsschritte begründen müssen, um die volle Punktzahl zu erreichen.

1. Aufgabe(Lösung) (10 Punkte)

a) Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, lassen sich die Eigenwerte direkt ablesen: $\lambda_1 = 1$ (mit algebraischer Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = -1$ (mit algebraischer Vielfachheit 1). Die zugehörigen Eigenräume sind $\operatorname{span}\{e_1\}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und $\operatorname{span}\{e_3\}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$.
Das charakteristische Polynom von B berechnet sich zu $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$. Damit besitzt B die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$ (jeweils mit algebr. Vielfachheit 1). Um die Eigenräume zu erhalten, müssen wir die linearen Gleichungssysteme $(B - \lambda E)\,x = 0$ für jeden EW lösen. Zum EW $\lambda_1 = -1$:

$$(B+E)x = 0 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Eigenraum (ER) zum EW -1 ist also $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Zum EW $\lambda_2 = 1$:

$$(B-E)x = 0 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist der ER zum EW 1 gleich $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Zum EW $\lambda_3 = 2$:

$$(B-2E)x = 0 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist der ER zum EW 2 gleich span $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Für die Matrix C erhalten wir das charakteristische Polynom $P_C(\lambda) = \det(C - \lambda E) = -\left(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1\right) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$, weshalb $\lambda_1 = 1$ EW von C (mit alg. Vf. 2) und $\lambda_2 = -1$ EW von C (mit alg. Vf. 1) ist.
Bestimmung des Eigenraums für $\lambda_1 = 1$:

$$(C - E)\,x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix}-4 & -2 & 0 & | & 0\\ 6 & 4 & -2 & | & 0\\ 2 & 2 & -2 & | & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & -2 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}.$$

Damit ist der ER zum EW 1 gleich span $\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Bestimmung des ER für $\lambda_1 = -1$:

$$(C + E)x = \rightarrow \begin{pmatrix}-2 & -2 & 0 & | & 0\\ 6 & 6 & -2 & | & 0\\ 2 & 2 & 0 & | & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}.$$

Damit ist der ER zum EW -1 gleich span $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

b) Die Matrix B besitzt drei verscheidene Eigenwerte, ist demnach diagonalisierbar. Damit ist B ähnlich zu der Matrix $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, welche in Diagonalform und somit in Jordannormalform (JNF) ist.
Die Matrizen A und C besitzen beide den EW 1 mit alg. VF 2 und geom. Vf. 1. Die zugehörigen Matrizen in JNF besitzen demnach zum EW 1 nur einen Jordanblock, der Länge 2 haben muss. Beide Matrizen haben $\lambda_2 - 1$ als EW jeweils mit alg. und geom. Vf. 1, weshalb zu diesem EW ein Jordanblock der Länge 1 gehört. Damit sind A und C ähnlich zu der Matrix $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ in JNF.

c) Da A und C ähnlich zu der selben Matrix in JNF sind, sind sie auch ähnlich zueinander. B ist zu keiner der anderen beiden ähnlich.

2. Aufgabe(Lösung) (10 Punkte)

a) Zu zeigen ist, dass die angegebene Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein (reelles) Skalarprodukt auf V definiert, d.h. dass die Eigenschaften (B_1), (B_2), (S) und (P) gelten. Dazu seien $f, f', g \in V$ und $s \in \mathbb{R}$.

(B_1) $\langle f+f',g\rangle = \sum_{i=0}^2 (f+f')(i)g(i) = \sum_{i=0}^2 f(i)g(i) + \sum_{i=0}^2 f'(i)g(i)$
$= \langle f,g\rangle + \langle f',g\rangle$,
$\langle sf,g\rangle = \sum_{i=0}^2 sf(i)g(i) = s\sum_{i=0}^2 f(i)g(i) = s\langle f,g\rangle$.

(B_2) analog zu (B_1).

(S) $\langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^2 f(i)g(i) = \sum_{i=0}^2 g(i)f(i) = \langle g,f\rangle$.

(P) $\langle f,f\rangle = \sum_{i=0}^2 f(i)^2 \geq 0$. Außerdem gilt $\langle f,f\rangle = 0$ genau dann, wenn $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ gilt. Das einzige Polynom von Grad 2, welches dies erfüllt, ist das Nullpolynom.

b) Wir starten mit einer beliebigen Basis von V und führen Gram-Schmidt bzgl. des angegebenen Skalarprodukts durch. Als Basis wählen wir $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ und $f_3(x) = x^2$. Es gilt $\|f_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1\rangle} = \sqrt{3}$, weshalb wir $\mathrm{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} f_1$, also

$$\mathrm{v}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

setzen. Mit $\langle f_2, f_1\rangle = 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3$ berechnen wir $u_2 = f_2 - \langle f_2, \mathrm{v}_1\rangle \mathrm{v}_1 = f_2 - \frac{1}{3}\langle f_2, f_1\rangle f_1 = f_2 - f_1$, also $u_2(x) = x - 1$. Mit $\|u_2\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_2(i)^2} = \sqrt{2}$ folgt $\mathrm{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_2 - f_1)$, also

$$\mathrm{v}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1).$$

Mit $\langle f_3, f_1\rangle = 5$ und $\langle f_3, f_2\rangle = 9$ berechnen wir

$$\begin{aligned} u_3 &= f_3 - \langle f_3, \mathrm{v}_1\rangle \mathrm{v}_1 - \langle f_3, \mathrm{v}_2\rangle \mathrm{v}_2 \\ &= f_3 + \frac{1}{3} f_1 - 2 f_2, \end{aligned}$$

also $u_3(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$. Es gilt $\|u_3\| = \sqrt{\frac{1}{3}^2 + (-\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Damit erhalten wir $\mathrm{v}_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(f_3 + \frac{1}{3} f_1 - 2 f_2\right)$, also

$$\mathrm{v}_3(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}(x^2 - 2x + \frac{1}{3}).$$

Die Polynome v_1, v_2 und v_3 bilden nun eine ONB von V bzgl. des in a) angegebenen Skalarprodukts.

3. Aufgabe(Lösung) (10 Punkte)

Das charakteristische Polynom p_A von A lautet

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$$

und daher sind $t_1 = -1$ und $t_2 = 3$ die Eigenwerte von A. Als zugehörige Eigenvektoren ergeben sich z.B. $v_1 = (1, -1)$ und $v_2 = (1, 1)$. Man normiert v_1 und v_2 und erhält: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sowie $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Dann ist

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine geeignete Matrix und es ist

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1. \end{pmatrix}.$$

Wie erwartet finden sich die Eigenwerte von A auf der Diagonalen.

4. Aufgabe(Lösung) (10 Punkte)

Wir beschreiben zunächst $Q(x) = x^T Ax$ mit einer symmetrischen Matrix A, nämlich $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Dann bestimmen wir die Eigenwerte von B aus der Gleichung $(2-x)^2 = 9$ als $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$. Ein EV zum EW 5 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, der erste Basisvektor der gesuchten ONB ist also $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ein EV zum EW -1 ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, der zweite Basisvektor der gesuchten ONB ist daher $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Hauptachsen der Quadrik sind die Winkelhalbierenden des Koordinatensystems. Seien die Koordinaten bzgl. der neuen Basis x_1', x_2'. Dann hat die gegebene Hyperbel die Asymptoten $x_2' = \pm\sqrt{5}x_1'$.

Skizze!

5. Aufgabe(Lösung) (10 Punkte)

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $P_A(t) = -t^3$. Der einzige Eigenwert ist somit 0 mit alg. Vf. 3, was bei nilpotenten Matrizen nicht verwunderlich ist. Wir berechnen zunächst die Potenzen von A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = (0).$$

Nun bestimmen wir schrittweise eine Basis des verallgemeinerten ER $V_0(A)$:

$\text{kern}A = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathrm{kern} A^2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Damit ist z.B. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $V_0(A)$.

Nun bilden wir eine Jordankette zu den verallgemeinerten EV bzgl. obiger Basis.
Da $A^3 u_3 = 0$, gilt $\mathrm{v}_3 = u_3$.

$\mathrm{v}_2 = A\mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\mathrm{v}_1 = A^2\mathrm{v}_3 = A\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Die Folge $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ ist dann eine Jordankette von A zum EW 0.
Nun können wir die Übergangsmatrix bilden, indem wir die verallgemeinerten EV in die Spalten schreiben, und zwar in aufsteigender Ordnung der Stufe:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$S = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

folgt

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da der einzige Jordanblock die Länge 3 hat, ist das Minimalpolynom nach 11.1.10 gegeben durch $P_0(t) = t^3$.

6. Aufgabe(Lösung) (10 Punkte)

a) Sei $f(-x) = \lambda x$. Dann folgt $f(-x) = (-\lambda)(-x)$ und $f(x) = (-\lambda)x$. Also sind x und $-x$ Eigenvektoren zum Eigenwert $-\lambda$.

b) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}$$

ist schiefhermitesch, da $A = -A^*$. Nach 9.1.7 sind schiefhermitesche Matrizen normal. Aus dem Hauptsatz über normale Matrizen folgt die Diagonalisierbarkeit.

c) Es gilt zwar $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$, aber die Vektoren sind keine Einheitsvektoren, denn $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 - i^2} = \sqrt{2} \neq 1$. Die Aussage ist also falsch!

d) Sind alle Eigenwerte null, so ist das charakteristische Polynom $\pm x^n = 0$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton erfüllt jede Matrix ihr charakteristisches Polynom, d.h. es gilt $\pm A^n = 0$. Also ist A nilpotent.

e) Das charakteristsiche Polynom der angegebenen Matrix ist

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Die Eigenwerte sind $\pm i$. Da die Eigenwerte auf der Diagonalen der Jordannormalform stehen, kann die Matrix nicht zu einer reellen Matrix in JNF ähnlich sein. Die Aussage ist also falsch!