Lineare Algebra 2
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
13. Juli - 15. Juli 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform und die zugehörige Jordanbasis für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Das charakteristische Polynom ist $(x-1)^3(x-2)$. Die Eigenwerte sind 1 mit alg. Vf. 3 und 2 mit alg. Vf. 1.
Es genügt also, den Jordanblock zum Eigenwert 1 zu betrachten.

$(A - 1E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Der Rang von $(A-E)$ ist 2, daher ist $\dim \operatorname{Kern}\{(A-E)\} = 2$. Da die geom. Vf. die Anzahl der Jordanblöcke angibt, erhalten wir zwei Blöcke zum EW 1 (einen der Länge 2 und einen der Länge 1).

Man erhält folgende Matrix in Jordanscher Normalform:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

Als nächstes berechnen wir die zugehörige Jordanbasis.
Dazu bestimmen wir zuerst eine Basis des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert 2.

$$\operatorname{Kern}(A-2E) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Dann bestimmen wir eine Basis des verallg. Eigenraums zum Eigenwert 1.

$$\operatorname{Kern}\{(A-1E)\} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\operatorname{Kern}\left\{(A-1E)^2\right\} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Wir wählen $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und berechnen $u_2 = (A - 1E)u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Um diese Vektoren zu einer Basis von Kern$(A - E)$ zu ergänzen, fügen wir $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hinzu.

Als Jordanbasis erhalten wir schließlich $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie eine **reelle** Jordan Normalform und die zugehörige Jordanbasis für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- Das charakteristische Polynom lautet $x^4 + 2x^2 + 1$. Die Matrix A hat keinen reellen Eigenwert (sondern $\pm i$). Das charakteristische Polynom lässt sich also auf das irreduzible Polynom $\left(x^2+1\right)^2$ faktorisieren.
- Wir bestimmen kern$\left\{\left(A^2+E\right)^m\right\}$ für jedes $m = 1, 2, \cdots, \tilde{m}$, wobei $\tilde{m}$ die kleinste natürliche Zahl ist mit $\dim\left(\text{kern}\left(A^2+E\right)^{\tilde{m}}\right) = 4$.

  $\text{kern}\left(A^2+E\right) = \text{kern}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

  $\text{kern}\left(A^2+E\right)^2 = \text{kern}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2\right\} = \text{kern}\{(0)\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$
- Nun stellen wir die reelle Jordansche Normalform auf.
  Die Anzahl der Jordanblöcke zum Faktor $x^2 + 1$ ist $\frac{1}{2}\left(\dim\left(\text{kern}\left(A^2+E\right)^m\right) - \dim\left(\text{kern}\left(A^2+E\right)^{m-1}\right)\right) = \frac{1}{2}(4-2) = 1$, deren Größe größer oder gleich $2m$ ist.

  $$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Als nächstes bestimmen wir die Basistransformationsmatrix P, also eine reelle invertierbare Matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$, so dass $J = P^{-1}AP$.
  Dabei werden die Vektoren u_1, u_2, u_3, u_4, die in den Spalten von P stehen, wie folgt bestimmt:

  Wähle einen Vektor $u_4 \in \text{kern}\left\{(A^2+E)^2\right\} \setminus \text{kern}\left\{(A^2+E)\right\}$, z.B. $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Dann setzt man für $t = 4, 3, 2$, sukzessiv

  $$u_{t-1} := \begin{cases} Au_t & , \text{ falls t gerade} \\ Au_t + u_{t+1} & , \text{ falls t ungerade} \end{cases}$$

Damit erhalten wir die Matrix $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, für die gilt: $J = P^{-1}AP$.

Aufgabe G3

Sei A eine komplexe 23×23-Matrix, die nur den Eigenwert 8 hat. Die Folge der Zahlen

$$\dim\left(\ker(A-8E)^k\right), \qquad k = 1, 2, \cdots$$

ist $7, 13, 16, 19, 21, 23, \cdots$. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform mit des in der Vorlesung eingeführten Young-Tableaus.

Lösung:

Wir berechnen zuerst $c_j = \dim \text{Kern}\left\{(A-1E)^j\right\} - \dim \text{Kern}\left\{(A-1E)^{j-1}\right\}$. Dies ist die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert 8, die $\geq j$ sind.

$c_1 = 7 - 0 = 7$, es gibt also insgesamt 7 Jordanblöcke.

$c_2 = 13 - 7 = 6$, es gibt also sechs Jordanblöcke, die echt größer sind als 1.

$c_3 = 16 - 13 = 3$, es gibt also drei Jordanblöcke, die ≥ 3 sind.

Analog folgt $c_4 = 19 - 16 = 3$, $c_5 = 21 - 19 = 2$, $c_6 = 23 - 21 = 2$. Nun zeichnet man c_j Kästchen in die j-te Spalte (von oben nach unten). Dadurch erhält man das Young-Tableau. Die Anzahl der Zeilen gibt die Anzahl der Jordan-Blöcke zum jeweiligen Eigenwert an und ihre Größe kann man an der Anzahl der Kästchen in den Zeilen ablesen. In unserem Fall erhalten wir 7 Jordan-Blöcke zum Eigenwert 8, einen der Größe 1, drei der Größe 2, einen der Größe 4 und zwei der Größe 6. Man erhält folgende Matrix in Jordanscher Normalform:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 &&&&&& \\ & J_2 &&&&& \\ && J_3 &&&& \\ &&& J_4 &&& \\ &&&& J_5 && \\ &&&&& J_6 & \\ &&&&&& J_7 \end{pmatrix}$$

mit

$$J_1 = J_2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 &&&& \\ & 8 & 1 &&& \\ && 8 & 1 && \\ &&& 8 & 1 & \\ &&&& 8 & 1 \\ &&&&& 8 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 8 & 1 && \\ & 8 & 1 & \\ && 8 & 1 \\ &&& 8 \end{pmatrix}, \quad J_4 = J_5 = J_6 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ & 8 \end{pmatrix}, \quad J_7 = (8).$$