Lineare Algebra 2
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
06. Juli - 08. Juli 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

a) Geben Sie eine Matrix an, deren charakteristisches Polynom $(1-x)^3(2-x)^2$ und deren Minimalpolynom $(x-1)^2(x-2)$ ist. Ist diese bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestmmt?

b) Geben Sie eine Matrix an, die genau drei verschiedene Eigenwerte hat und deren Minimalpolynom Grad 4 hat.

c) Charakterisieren Sie diejenige Matrizen, deren Minimalpolynom (ggf. bis auf Vorzeichen) mit ihrem charakteristischen Polynom übereinstimmt.

d) Ist allgemein die Jordannormalform einer Matrix (bis auf Permutation der Jordanblöcke) durch Angabe von charakteristischem Polynom und Minimalpolynom eindeutig bestimmt?

Lösung:

a) Der Eigenwert 1 hat algebraische Vielfachheit 3. Nach 11.1.10 ist die maximale Größe eines Jordanblocks zum Eigenwert 1 zwei. Also gibt es zwei Jordanblöcke zum Eigenwert 1, einen der Größe eins und einen der Größe zwei. Ebenso hat der Eigenwert 2 algebraische Vielfachheit zwei, der maximale Jordanblock hingegen Größe eins. Damit ergibt sich die folgenden Jordannormalform (die also bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt ist):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Hier ist die maximale Größe der Jordanblöcke zu den verschiedenen Eigenwerten zu bestimmen, nämlich 2,1,1. Ein Beispiel wäre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Ebenfalls aus 11.1.10 folgt, dass für diejenigen Matrizen, die zu jedem Eigenwert genau einen Jordanblock haben, charakteristisches Polynom und Minimalpolynom (ggf. bis auf Vorzeichen) übereinstimmen.

d) Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, wie z.B. die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

belegen. Beide haben $-x^5$ als charakteristisches Polynom und x^3 als Minimalpolynom.

Aufgabe G2

a) Beweisen Sie, dass jede quadratische komplexe Matrix ähnlich zu ihrer Transponierten ist.

b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $A \in M_2(\mathbb{C})$, für das $A = 0$ oder $A^2 \neq 0$ gilt, ein $B \in M_2(\mathbb{C})$ gibt, so dass $B^2 = A$.

Lösung:

a) Sei A eine komplexe $k \times k$-Matrix. Bekanntlich ist der Rang einer Matrix gleich dem Rang ihrer Transponierten. Daher ist

$$\begin{aligned}
\dim\left(\ker\left(A^T - \lambda I\right)^n\right) &= \dim\left(\ker\left((A-\lambda I)^T\right)^n\right) \\
&= k - \operatorname{rank}\left(\left((A-\lambda I)^n\right)^T\right) \\
&= k - \operatorname{rank}\left((A-\lambda I)^n\right) \\
&= \dim\left(\ker(A-\lambda I)^n\right).
\end{aligned}$$

Nach 11.2.16 ist dann A ähnlich zu A^T.

b) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $A = 0$ oder $A^2 \neq 0$. Sei $N = SAS^{-1}$ eine Jordannormalform für A. Es sind zwei Fälle möglich:

1. Fall: $N = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Dann setzen wir $N' = \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 \\ 0 & \lambda_2' \end{pmatrix}$, wobei λ_1' und λ_2' Quadratwurzeln aus λ_1 und λ_2 sind.

2. Fall: $N = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann setzen wir $N' = \begin{pmatrix} \lambda' & \frac{1}{2\lambda'} \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$, wobei λ' eine Quadratwurzel aus λ ist.

In beiden Fällen ist $N'N' = N$. Für $B := S^{-1}N'S$ gilt dann also $B^2 = (S^{-1}N'S)(S^{-1}N'S) = S^{-1}N'N'S = S^{-1}NS = A$. Sei nun $A = B^2$ mit $A \neq 0$. Dann ist $B \neq 0$ und die Normalform von B ist ungleich $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Daher hat B einen von Null verschiedenen Eigenwert und $A^2 = B^4$ kann nicht die Nullmatrix sein.

Aufgabe G3

a) Es sei $A \in M_7(\mathbb{C})$ eine nilpotente Matrix, für die gilt:

$$\operatorname{rank}(A) = 4, \quad \operatorname{rank}\left(A^2\right) = 1, \quad \operatorname{rank}\left(A^3\right) = 0.$$

Geben Sie die Jordannormalform von A an.

b) Bestimmen Sie die Jordannormalform der (nilpotenten) Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Da A nilpotent ist, besitzt A nur den Eigenwert $\lambda = 0$. Es gilt $\dim(\ker(A)) = 7 - \operatorname{rank}(A) = 3$, weshalb die geometrische Vielfachheit von λ gleich 3 ist. Daraus folgt, dass es drei verschiedene Jordankästchen und damit ebensoviele Jordanketten geben muss. Wegen $\dim\left(\ker(A^2)\right) = 7 - \operatorname{rank}\left(A^2\right) = 6$ und der Tatsache, dass $\ker(A) \subset \ker\left(A^2\right)$ gilt, folgt, dass jede dieser Jordanketten mindestens noch ein weiteres Element enthält, alle drei Ketten also mindestens Länge zwei haben (Es sind nämlich drei linear unabhängige Vektoren in $\ker\left(A^2\right)$ zu finden, welche nicht schon in $\ker(A)$ liegen). Wegen $\operatorname{rank}\left(A^3\right) = 0$ kann noch ein linear unabhängiger Vektor in $\ker\left(A^3\right) = \mathbb{R}^7$

gefunden werden, welcher nicht schon in ker $\left(A^2\right)$ liegt. Damit muss es eine Jordankette der Länge drei und zwei Jordanketten der Länge zwei geben und wir erhalten folgende Jordan-Normalform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir gehen analog zu a) vor und bestimmen den Rang der Potenzen von B: Es gilt $\mathrm{rank}(B) = 3$, $\mathrm{rank}\left(B^2\right) = 1$ und $\mathrm{rank}\left(B^3\right) = 0$. Damit sehen wir, dass es $5 - 3 = 2$ verschiedene Jordankästchen geben muss, dass beide mindestens Länge 2 besitzen müssen und es höchstens ein Kästchen der Länge 3 geben kann. Also besitzt B folgende Jordan-Normalform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$