Lineare Algebra 2
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
29. Juni - 01. Juli 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

a) Finden Sie eine komplexe Matrix in Jordanscher Normalform, die -1 als einzigen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 hat.

b) Finden Sie eine komplexe Matrix in Jordanscher Normalform, die die folgenden Eigenwerte hat:

1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1,
2 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 3,
5 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 2.

c) Finden Sie Matrizen in Jordanscher Normalform, die ähnlich zu den folgenden Matrizen sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie die verallgemeinerten Eigenräume der Matrizen aus c).

Lösung: Die Lösungen der Teilaufgaben a), b) und c) benutzen nur die Bemerkung 11.1.9 im Skript.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & 2 & 1 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 2 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 2 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 2 & & \\ & & & & & & & 5 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 5 \end{pmatrix}$

c) Da die Matrix A als einzigen Eigenwert 2 mit geometrischer Vielfachheit 1 hat, ist sie ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von B sind 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1, und 3 mit Vielfachheit 1. Daher ist B ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von C sind 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1, und 2 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 2. Also ist B ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Der verallgemeinerte Eigenraum von A zum einzigen Eigenwert 2 ist $\mathbb{R}^2$.
Der verallgemeinerte Eigenraum von B zum Eigenwert 1 ist $\ker\left(B - E_3\right)^2 = \operatorname{span}(e_1, e_2)$, der verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert 3 ist der Eigenraum, der von $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.
Der verallgemeinerte Eigenraum von C zum Eigenwert 1 ist $\ker\left(C - E_4\right)^2 = \operatorname{span}(e_1, e_4)$. Der verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert 2 ist der gewöhnliche Eigenraum, der von den Vektoren e_3 und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Aufgabe G2

a) Bestimmen Sie eine Jordanbasis für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

a) Wir bestimmen die Eigenwerte von A aus der charakteristischen Gleichung:

$$0 = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ -9 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)(8-\lambda) + 36 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Der Eigenraum zum einzigen Eigenwert 2 ist der Kern der Matrix $A - 2E = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$. Dieser wird von $u_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugt, also hat 2 die geometrische Vielfachheit 1. Daher ist die Jordannormalform von A $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Um u_1 zu einer Jordanbasis zu erweitern, benötigen wir einen Vektor $u_2 \in \mathbb{R}^2$, so dass $(A - 2E)u_2 = u_1$. Eine Lösung dieses Systems ist $u_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Matrix, die den Basiswechsel von der Standardbasis auf die Basis (u_1, u_2) beschreibt ist $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, ihre Inverse ist $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ und man prüft leicht nach, dass tatsächlich

$$A' := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Wie in Bemerkung 11.2.17 setzten wir $N := A' - 2E$. Wegen $N^2 = 0$ erhält man aus der binomischen Formel

$$(A')^n = (2E + N)^n = (2E)^n + \binom{n}{1}(2E)^{n-1}N = 2^n E + n \cdot 2^{n-1} N = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $A^n = (SA'S^{-1})^n = S(A')^n S^{-1}$ erhalten wir

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 4 & 2n-2 \\ 6 & 3n-2 \end{pmatrix} S^{-1} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2-6n & 4n \\ -9n & 2+6n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3

Es seien $A_1,\ A_2, \cdots, A_8 \in M_5(\mathbb{C})$ komplexe 5×5-Matrizen, die alle den Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ haben und keinen weiteren. Zeigen Sie, dass mindestens zwei der Matrizen $A_1,\ A_2, \cdots, A_8$ zueinander ähnlich sind.

Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz über die Jordansche Normalform.

Lösung: Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist A nach Folg. 11.1.6 ähnlich zu einer der folgenden sieben Matrizen (bis auf Permutation der Jordanblöcke):

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ 0 & \lambda & & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & 0 & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ 0 & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Da Matrizen, die sich nur durch eine Permutation der Jordanblöcke unterscheiden, ähnlich zueinander sind, müssen mindestens zwei der acht (verschiedenen) 5×5-Matrizen ähnlich zueinander sein.

Aufgabe G4

Zeigen Sie: Der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring.

Lösung: Wir müssen zeigen. dass jedes Ideal von $\mathbb{Z}$ ein Hauptideal ist, d.h. ein Ideal, das von einem Element erzeugt wird. Wir schreiben $(a) := \left\{ar \;\middle|\; r \in \mathbb{Z}\right\}$ für das von a erzeugte Hauptideal. Sei I ein Ideal von $\mathbb{Z}$.
Ist $I = \{0\}$, so ist $I = (0)$ das von 0 erzeugte Hauptideal.
Andernfalls enthält I mindestens ein von 0 verschiedenes Element. Es sei $b \in I$, $b \neq 0$ und $\left|b\right|$ minimal.
Ist $a \in I$, so gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = q \cdot b + r,$$

wobei $r = 0$ oder $\left|r\right| < \left|b\right|$.
Da I ein Ideal ist, gilt $q \cdot b \in I$ und damit auch

$$r = a - q \cdot b \in I.$$

Da $b \in I$ mit $\left|b\right|$ minimal gewählt wurde, muss $r = 0$ und damit $a = q \cdot b$ gelten. Also gilt $a \in (b)$ und $I \subset (b)$.
Umgekehrt ist jedes Element von (b) von der Form $q \cdot b$ für ein $q \in \mathbb{Z}$. Da I ein Ideal ist, gilt auch $q \cdot b \in I$, woraus $(b) \subset I$ folgt.
Damit muss $I = (b)$ gelten, was die Behauptung zeigt.

Hausübung

Aufgabe H35

Bestimmen Sie eine Jordanbasis für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Durch Entwicklung nach der ersten Spalte erhalten wir die charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 4 \\ -2 & -2-\lambda & -4 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) + 2(8 - 4\lambda) + (-8 + 4\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \\ &= -(\lambda - 2)^3. \end{aligned}$$

Der einzige Eigenwert ist daher 2. Da der Rang von

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1 ist, ist seine geometrische Vielfachheit 2 (Dimensionsformel), also hat A die Jordannormalform

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die zugehörige Jordanbasis $B = (u_1, u_2, u_3)$ nach 11.2.15. Der erste Vektor ist ein Eigenvektor, der das Bild von $A - 2E$ erzeugt. Wir wählen z.B. $u_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun muss u_3 ein von u_1 linear unabhängiger Eigenvektor sein; wir wählen $u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Schließlich muss der Vektor u_2 die Gleichung $(A - 2E)u_2 = u_1$ erfüllen. Eine Lösung dieser Gleichung ist $u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H36
Sei V ein Vektorraum und $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ eine Folge von Untervektorräumen. Zeigen Sie:

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$$

ist ein Untervektorraum von V.
Folgern Sie, dass der verallgemeinerte Eigenraum $\mathrm{V}^{\lambda}(\varphi)$ eines Endomorphismus $\varphi : V \to V$ zum Eigenwert λ (wie in der Vorlesung definiert) tatsächlich ein Untervektorraum von V ist.

Lösung: Wir überprüfen die Unterraumaxiome:

- $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m \neq \emptyset$, da $U_m \neq \emptyset$ (U_m UVR) für alle $m \in \mathbb{N}$.
- Seien $u_1, u_2 \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$. Dann gilt o.B.d.A $u_1 \in U_k$, $u_2 \in U_l$ für $k, l \in \mathbb{N}$, $k \leq l$. Da $U_k \subseteq U_l$ gilt auch $u_1 \in U_l$ und damit (da U_l UVR) auch $u_1 + u_2 \in U_l$. Somit gilt natürlich auch $u_1 + u_2 \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$.
- Sei $u \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt wie oben $u \in U_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Da U_k ein UVR ist, gilt $\lambda u \in U_k$, also auch $\lambda u \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$.

Man überprüft leicht, dass $\ker\left(\varphi - \lambda \mathrm{id}\right)^m \subseteq \ker\left(\varphi - \lambda \mathrm{id}\right)^{m+1}$, denn für $u \in \ker\left(\varphi - \lambda \mathrm{id}\right)^m$ gilt auch

$$\left(\varphi - \lambda \mathrm{id}\right)^{m+1} u = \left(\varphi - \lambda \mathrm{id}\right) \underbrace{\left(\varphi - \lambda \mathrm{id}\right)^m u}_{=0} = 0.$$

Somit ist der verallgemeinerte Eigenraum $\mathrm{V}^{\lambda}(\varphi) := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \ker\left(\varphi - \lambda \mathrm{id}\right)^m$ tatsächlich ein Untervektorraum von V.

Aufgabe H37
Sei $\varphi : R \to S$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen, d.h. für alle $q, r \in R$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(q + r) &= \varphi(q) + \varphi(r) \\ \varphi(q \cdot r) &= \varphi(q) \cdot \varphi(r). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\ker(\varphi) := \left\{ r \in R \,\middle|\, \varphi(r) = 0 \right\}$$

ein Ideal von R ist.

Lösung: Seien $r, s \in \ker(\varphi)$ und $q \in R$.

- $\varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s) = 0$, also $r + s \in \ker(\varphi)$
- $\varphi(qr) = \varphi(q) \cdot \varphi(r) = 0$, also $qr \in \ker(\varphi)$