Lineare Algebra 2
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
22.–24. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten den reellen Vektorraum V der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass $\det : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form ist.

b) Bestimmen Sie die Matrix der assoziierten Bilinearform bezüglich der Basis

$$B = \left(B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

c) Bestimmen Sie die Hauptachsen und skizzieren Sie die Mengen

$$\{u \in V : \det u = 1\}, \quad \{u \in V : \det u = -1\}$$

(als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, wenn jede Matrix mit ihren Koordinaten bezüglich obiger Basis identifiziert wird).

Lösung:

a) Es seien $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix} \in V$.
Dann gilt $\det(\lambda A) = \lambda^2 a_1 a_2 - \lambda^2 a_3^2 = \lambda^2 \left(a_1 a_2 - a_3^2 \right) = \lambda^2 \det(A)$.
Für

$$\begin{aligned} F(A,B) &= \frac{1}{2} (\det(A+B) - \det(A) - \det(B)) \\ &= \frac{1}{2} \left((a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - (a_3 + b_3)^2 - (a_1 a_2 - a_3^2) - (b_1 b_2 - b_3^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2 a_3 b_3 \right) \end{aligned}$$

sieht man leicht, dass diese bilinear ist (denn es gelten die Eigenschaften (B1) und (B2)).

b) Um die Matrix der assoziierten Bilinearform zu bestimmen, müssen wir (nach Def. 10.1.3) $F(B_i, B_j)$ für $i, j = 1, 2, 3$ berechnen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} F(B_1, B_1) &= \frac{1}{2}(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0) = 0 \\ F(B_1, B_2) &= F(B_2, B_1) = \frac{1}{2} \\ F(B_1, B_3) &= F(B_3, B_1) = 0 \\ F(B_2, B_2) &= 0 \\ F(B_2, B_3) &= F(B_3, B_2) = 0 \\ F(B_3, B_3) &= -1. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Matrix:

$$M = [F]_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) Wir führen Hauptachsentransformation mit M durch. Dazu bestimmen wir zuerst die Eigenwerte und Eigenvektoren.
Charakteristisches Polynom: $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda E) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{4})$
Eigenwerte: $\lambda_1 = -1,\ \ \lambda_2 = \frac{1}{2}\ \ \lambda_3 = -\frac{1}{2}$
Normierte Eigenvektoren: $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0. \end{pmatrix}$
Zurückübersetzt in Matrizen sind die drei Hauptachsen die eindimensionalen Unterräume von V, welche durch die Matrizen

$$M_1 = 1 \cdot B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt werden. Identifizieren wir nun diese Unterräume mit ihren Koordinaten bezüglich der Basis B als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, so beschreibt die Quadrik $\left\{u \in V \,\middle|\, \det u = 1\right\}$ ein zweischaliges Hyperboloid mit den Hauptachsen, welche von den Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ erzeugt werden. Die Menge $\left\{u \in V \,\middle|\, \det u = -1\right\}$ beschreibt dann entsprechend ein einschaliges Hyperboloid.

Aufgabe G2

a) Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit oder indefinit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ positiv, für welche Werte negativ definit?

Lösung:

a)
- A_1 besitzt 0 und 5 als Eigenwerte und ist demnach positiv semidefinit
- A_2 ist nach dem Hauptminorenkriterium (Satz 10.4.7) positiv definit
- A_3 besitzt einen positiven und einen negativen Eigenwert und ist demnach indefinit
- A_4 ist indefinit, da $e_1^T A_4 e_1 = -4 < 0$, aber $e_2^T A_4 e_2 = 1 > 0$. (sh. Def. 10.4.1)
- A_5 ist mit dem Hauptminorenkriterium (Satz 10.4.7 (c')) negativ definit
- A_6 ist negativ semidefinit, denn ein Eigenwert ist null, die anderen beiden sind negativ ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$)

b) Wir berechnen die Determinanten der Hauptminoren:
$\det(B_1) = 3 > 0$ (hier sehen wir schon, dass B niemals negativ definit sein kann) ,
$\det(B_2) = 2 > 0$ und $\det(B) = 2a - 1$. Damit B positiv definit ist, muss $\det(B) > 0$ sein. Dieses ist für $a > \frac{1}{2}$ der Fall.

Aufgabe G3

Gilt analog zum Kriterium für positive Definitheit (Satz 10.4.7) auch folgendes Kriterium?
Eine reelle symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ *ist genau dann positiv semidefinit, wenn für alle Hauptminoren* A_r *mit* $r = 1, \cdots, n$ *gilt* $\det A_r \geq 0$.

Lösung:

Nein, denn z.B. sind die Hauptminoren der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ größer oder gleich 0, aber die Matrix ist nicht semidefinit, da sie einen negativen Eigenwert hat ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$). Ein anderes Beispiel wäre $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe G4

Es sei $B \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = B^T B$ symmetrisch und positiv semidefinit ist. In dem Fall, dass B invertierbar ist, ist A sogar positiv definit.

Lösung:

Hinweis: Bemerkung 10.4.2.
$A = B^T B$ ist symmetrisch, denn $A^T = (B^T B)^T = B^T B^{TT} = B^T B = A$.
Um zu zeigen, dass $B^T B$ eine positiv semidefinite Matrix ist, benutzen wir das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^T B^T B x = < Bx, Bx > \ \geq 0$, woraus folgt, dass $B^T B$ positiv semidefinit ist.
Ist B sogar invertierbar, so ist $Bx \neq 0$ für $x \neq 0$ und daher $x^T B^T B x > 0$ für $x \neq 0$, also ist $B^T B$ positiv definit.

Hausübung

Aufgabe H32
Betrachten Sie den Kegel

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \right\}$$

in $\mathbb{R}^3$, sowie die affin-lineare Einbettung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2$ für $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$.
Untersuchen Sie die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x) \in C \right\}$$

für

a) $u_0 = e_3,\ u_1 = e_1,\ u_2 = e_2$

b) $u_0 = e_1,\ u_1 = e_2,\ u_2 = e_3$

c) $u_0 = e_3,\ u_1 = e_2,\ u_2 = e_1 + e_3$

d) $u_0 = 0,\ u_1 = e_1 + e_3,\ u_2 = e_1 - e_3$

Zeigen Sie: Es handelt sich um einen Kreis, eine Hyperbel, eine Parabel, zwei sich schneidende Geraden.
Skizzieren Sie die Mengen C und $f(\mathbb{R}^2)$ jeweils.

Lösung:
Zur Klassifikation siehe auch Beispiele 10.3.4.

a) $f(x) = e_3 + x_1 e_1 + x_2 e_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \in C \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$. Dies ist die Gleichung eines Kreises (Bsp 10.3.4 a)).

b) $f(x) = e_1 + x_1 e_2 + x_2 e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in C \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1^2 + x_1^2 = x_2^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2^2 - x_1^2 = 1 \right\}$.

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel (Bsp. 10.3.4 b)).

c) $f(x) = e_3 + x_1 e_2 + x_2 (e_1 + e_3) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}$.

$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} \in C \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2^2 + x_1^2 = (x_2 + 1)^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} \right\}$.

Dies ist die Gleichung einer Parabel.

d) $f(x) = 0 + x_1(e_1+e_3) + x_2(e_1-e_3) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 0 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix}$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ 0 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix} \in C \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1+x_2)^2 = (x_1-x_2)^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1x_2 = 0 \right\}.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn entweder $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$. Die Teilmenge beinhaltet also genau die $x \in \mathbb{R}^n$, die entweder auf der x_1-Achse oder auf der x_2-Achse liegen.

Aufgabe H33

Zeigen Sie, dass zu einer symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$ existiert, für die $A = P^2$ gilt. Ist A sogar positiv definit, so auch P.

Lösung:

Da A symmetrisch und reell ist, ist A normal (Beispiel 9.1.7 e)),also exisitiert eine orthogonale Matrix S, so dass $A = SDS^T$ ist, wobei D eine Diagonalmatrix ist mit den Diagonaleinträgen $d_{11}, \cdots, d_{nn}$. Diese Diagonaleinträge sind genau die Eigenwerte von A. Da A positiv semidefinit ist, gilt $d_{ii} \geq 0$ für alle $i = 1, \cdots, n$. Setzen wir nun $Q := \operatorname{diag}\left(\sqrt{d_{11}}, \cdots, \sqrt{d_{nn}}\right)$, so gilt $D = Q^2$.Nun setzten wir $P := SQS^T$. Dann gilt

$$P^2 = SQS^TSQS^T = SQ^2S^T = SDS^T = A.$$

P ist offensichtlich symmetrisch. Da P und Q ähnlich sind und die Eigenwerte von Q alle ≥ 0 sind, ist P auch positiv semidefinit.

Ist A positiv definit, so gilt $d_{ii} > 0$ für alle $i = 1, \cdots, n$. Also sind auch die Diagonaleinträge von Q alle > 0, woraus die positive Definitheit von P folgt.

Aufgabe H34

Gegeben sei die reelle, symmetrische $n \times n$-Matri x

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & & b \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & & b & a \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, für welche A_n positiv, bzw. negativ definit ist.

Lösung:

Wir betrachten zuerst den Fall n=1. Die Matrix A_1 ist positiv definit für $a > 0$ und negativ definit für $a < 0$.

Nun dikutieren wir den allgemeinen Fall $n > 1$, indem wir das Hauptminorenkriterium verwenden. Dazu müssen wir jeweils $\det\left(A_k\right)$ für $k = 1, \cdots, n$ berechnen.

Wir ziehen die erste Zeile der Matrix A_n von allen übrigen Zeilen ab und erhalten:

$$A_n' = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ b-a & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Dann addieren wir nacheinander die zweite bis n-te Spalte zur ersten und erhalten die obere Dreiecksmatrix

$$A_n'' = \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & a-b & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Da diese Zeilen- und Spaltenumformungen die Determinante nicht verändern, ist $\det\left(A_n\right) = \det(A_n'') = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$ und analog für die Hauptminoren $\det\left(A_k\right) = (a-b)^{k-1}(a+(k-1)b)$.

- Überlegen wir uns zuerst, wann A_n positiv definit ist. Dazu müssen $\det(A_k) > 0$ sein für alle $k = 1, \cdots, n$. Für $k = 1$ gilt $\det(A_1) = a$, weshalb $a > 0$ gelten muss. Es ist $\det(A_2) = a^2 - b^2$, woraus $a > \left|b\right|$ folgt. Damit ist der Faktor $(a-b)^{k-1} > 0$ für alle $k = 1, \cdots, n$. Betrachten wir nun $\det(A_k) = (a-b)^{k-1}(a + (k-1)b)$. Für $\det(A_k) > 0$ muss dann auch $a + (k-1)b > 0$ sein. Ist $b \geq 0$, so ist dies stets der Fall. Ist $b < 0$, so gilt $(a + (k-1)b) < (a + (l-1)b)$ für $k > l$. Ist also $(a + (n-1)b) > 0$, so auch $(a + (k-1)b) > 0$ für alle $k = 1, \cdots, n$.
  Zusammenfassend erhalten wir:
  Die Matrix A_n ist genau dann positiv definit, falls entweder $a > 0, b \geq 0$ und $a > b$ gilt, oder $a > 0, b < 0$ und $a > (1-n)b$ gilt.

- Nun überlegen wir uns, wann A_n negativ definit ist. Wegen $\det(A_1) < 0$ muss dann $a < 0$ sein. Wegen $\det(A_2) > 0$ muss $\left|a\right| > \left|b\right|$ folgen. Damit ist $(a-b) < 0$. Wegen $\det(A_k) < 0$ für k ungerade und $\det(A_k) > 0$ für k gerade, muss $a + (k-1)b < 0$ für alle $k = 1, \cdots, n$ gelten. Für $b \leq 0$ ist dies immer erfüllt. Ist aber $b > 0$, so muss $-a > (n-1)b$ gelten.
  Zusammenfassend gilt:
  Die Matrix A_n ist genau dann negativ definit, falls $a < 0, b > 0$ und $b < \frac{a}{1-n}$ gilt, oder falls $a < 0, b \leq 0$ und $a < b$ gilt.

Fussballspiel

Habt ihr Lust den Mitarbeitern zu zeigen, dass ihr auch auf dem Fussballfeld richtig was zu bieten habt?
Dann nutzt die Chance beim Spiel "Mitarbeiter vs. Studenten" am 08. Juli um 16:00 Uhr.
Weitere Infos und Anmeldelisten liegen im 2. Stock des S2|15 aus.