Lineare Algebra 2
10. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
15.–17. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Finden Sie eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2$, die keine quadratische Form ist.

Lösung: Zum Beispiel die Abbildung $f(x) = \sqrt{x_1^4 + x_2^4}$.
Für diese gilt

$$f(\lambda x) = \sqrt{\lambda^4(x_1^4 + x_2^4)} = \lambda^2 \sqrt{x_1^4 + x_2^4} = \lambda^2 f(x).$$

Allerdings ist die Abbildung

$$F(x, y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) - f(x) - f(y)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x_1+y_1)^4 + (x_2+y_2)^4} - \sqrt{x_1^4 + x_2^4} - \sqrt{y_1^4 + y_2^4}\right)$$

nicht bilinear.
Um dies zu zeigen, wählt man z.B. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $x' = y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Damit ist

$$2 \cdot F(x + x', y) = \sqrt{17} - \sqrt{2} - 1 \neq 2 \cdot F(x, y) + 2 \cdot F(x', y) = \sqrt{2} - 1 - 1 + 4 - 1 - 1 = \sqrt{2}.$$

Nach Definition 10.2.1 kann die Abbildung f daher keine quadratische Form sein.

Aufgabe G2
Gegeben sei die Quadrik

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und den Typ der Quadrik.

Lösung: Wir führen die Hauptachsentransformation wie in 10.3.3 beschrieben durch.

(1)
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Die Gleichung $7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1$ lässt sich damit schreiben als $x^T A x = 1$.

(3) Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 - 7\lambda - 144$.
Eigenwerte: $\lambda_1 = -9$ und $\lambda_2 = 16$.

(4) Eigenvektoren:
$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Normiert man diese beiden Vekotoren, die senkrecht aufeinander stehen, so erhält man mit $B' = (u_1', u_2')$ mit $u_i = \frac{1}{5}u_i$, $i = 1, 2$, eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A.

(5) Sei $S = (u'_1, u'_2)$ die Matrix, bei der die Spalten die Vektoren u'_i der Orthonormalbasis B' sind. Dann ist S eine Orthogonalmatrix und es gilt:

$$A' = S^{-1}AS = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Die zwei von den Vektoren u'_1 und u'_2 aufgespannten eindimensionalen Unterräume sind die Hauptachsen der Quadrik. Bezüglich der Basis $B = (u'_1, u'_2)$ erfüllen die Vektoren der Quadrik die Gleichung $-9(x'_1)^2 + 16(x'_2)^2 = 1$.
Da $\lambda_1 = -9 < 0$ und $\lambda_2 = 16 > 0$, beschreibt die Quadrik nach 10.3.4 b) eine Hyperbel mit den Asymptoten $x_1 = \pm\frac{4}{3}x_2$.

Aufgabe G3
Sei $x \in \mathbb{R}^2$.

a) Zeichnen Sie eine Skizze der Punkte, die die Gleichung

$$x_1x_2 = 1$$

erfüllen. Ist dies eine Quadrik? Was ist die quadratische Form?

b) Welche Gleichung erhält man, wenn man $x_1 = x'_1 + x'_2$ und $x_2 = x'_1 - x'_2$ substituiert?

c) Welcher Basistransformation entspricht diese Substitution?

Lösung:

a) Dies ist eine Quadrik zur quadratischen Form $Q(x) = x_1x_2$.
Tatsächlich ist

$$Q(\lambda x) = \lambda x_1 \lambda x_2 = \lambda^2 Q(x)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$, und die Abbildung

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right) = \frac{1}{2}\left((x_1+y_1)(x_2+y_2) - x_1x_2 - y_1y_2\right) = \frac{1}{2}\left(x_1y_2 + y_1x_2\right)$$

ist bilinear.

b) $(x'_1 + x'_2)(x'_1 - x'_2) = x'^2_1 - x'^2_2 = 1$

c) Die Übergangsmatrix, die die Vektoren der Standardbasis in der neuen Basis darstellt, ist $S = [\mathrm{id}]^K_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
(Dazu löst man die Gleichungssysteme $1 = x'_1 + x'_2$, $0 = x'_1 - x'_2$ bzw. $0 = x'_1 + x'_2$, $1 = x'_1 - x'_2$.)

Um die neuen Basisvektoren zu berechnen, nutzt man $S^{-1} = [\mathrm{id}]^B_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und erhält als neue Basisvektoren: $S^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [\mathrm{id}]^B_K\,[b_1]_B = [b_1]_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $S^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [\mathrm{id}]^B_K\,[b_2]_B = [b_2]_K = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Will man nur die neuen Basisvektoren bestimmen, so erhält man ihre Koordinaten bezüglich der Standardbasis, indem man ihre Koordinaten bezüglich der neuen Basis einsetzt:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H29
Gegeben sei die Quadrik

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 = 1\right\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und den Typ der Quadrik.

Lösung: Wir führen die Hauptachsentransformation wie in 10.3.3 beschrieben durch.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) Die Gleichung $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 = 1$ lässt sich damit schreiben als $x^TAx = 1$.

(3) Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda$.
Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 6$.

(4) Eigenvektoren:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normiert man diese drei Vekotoren, die senkrecht aufeinander stehen, so erhält man mit $B' = (u_1', u_2', u_3')$ mit $u_i = \frac{1}{3}u_i$, $i = 1, 2, 3$, eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A.

(5) Sei $S = (u_1', u_2', u_3')$ die Matrix, bei der die Spalten die Vektoren u_i' der Orthonormalbasis B' sind. Dann ist S eine Orthogonalmatrix und es gilt:

$$A' = S^{-1}AS = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Die drei von den Vektoren u_1', u_2' und u_3' aufgespannten eindimensionalen Unterräume sind die Hauptachsen der Quadrik.
Bezüglich der Basis $B = (u_1', u_2', u_3')$ erfüllen die Vektoren der Quadrik die Gleichung $3(x_2')^2 + 6(x_3')^2 = 1$.
Da $\lambda_1 = 0$, ist die Quadrik entartet.

Aufgabe H30
Es sei das einschalige Hyperboloid

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1 \right\}$$

im $\mathbb{R}^3$ gegeben.
Zeigen Sie, dass durch jeden Punkt von H genau zwei Geraden verlaufen, die ganz in H enthalten sind.

Lösung: Sei $x \in H$. Nach einer Drehung um die x_3-Achse können wir annehmen, dass $x_2 = 0$. Ist $u \in \mathbb{R}^3$, $u \neq 0$, so ist die Gerade

$$\left\{ x + tu \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

genau dann in H enthalten, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$(x_1 + tu_1)^2 + (tu_2)^2 - (x_3 + tu_3)^2 = 1.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$x_1^2 - x_3^2 + 2t(x_1u_1 - x_3u_3) + t^2(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) = 1.$$

Da $x_1^2 - x_3^2 = 1$, ist dies wiederum äquivalent zu

$$x_1u_1 - x_3u_3 = 0 \text{ und} \tag{1}$$

$$u_1^2 + u_2^2 = u_3^2. \tag{2}$$

Wir suchen nach Lösungen $u = (u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$ der Gleichungen (1) und (2). Aus Gleichung (2) sieht man, dass für jede Lösung $u_3 \neq 0$. Da die Geraden $\left\{ x + tu \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ x + tu' \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$genau dann gleich sind, wenn sich die

Richtungsvektoren nur um einen skalaren Faktor unterscheiden, können wir die Lösungen von (1) und (2) so normieren, dass

$$u_3 = 1. \tag{3}$$

Diese Gleichungen sind dann äquivalent zu

$$x_1 u_1 = w_3 \tag{4}$$

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \tag{5}$$

mit $u_3 = 1$. Die Lösungen von (4) und (5) entsprechen bijektiv den Geraden durch x, die ganz in H enthalten sind. Da $x_1^2 - x_3^2 = 1$, ist

$$\left|\frac{x_3}{x_1}\right| < 1.$$

Also hat das Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen (4) und (5) als Lösungen gerade

$$\left(u_1^{\pm}, u_2^{\pm}\right) = \left(\frac{x_3}{x_1}, \pm\frac{1}{x_1}\right).$$

Aufgabe H31
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine quadratische Hyperfläche, d.h. es gilt $S = Q^{-1}(\{1\})$ für eine quadratische Form $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Sei A die Matrix der zugehörigen symmetrischen Bilinearform.

a) Zeigen Sie: Jede orthogonale Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die die Eigenräume von A invariant lässt, bildet S auf S ab.
b) Nutzen Sie dies, um zu zeigen, dass H wie in Aufgabe (H30) rotationssymmetrisch ist.

Lösung:

a) Sei $x \in S$. Dann gilt $Q(x) = 1$, was äquivalent ist zu

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j = 1.$$

Sei f eine orthogonale Abbildung. Dann gilt wegen f(x)f(y)=xy:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} f(x_i)^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} f(x_i) f(x_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j = 1.$$

Also ist $f(x) \in S$.

b) H ist rotationssymmetrisch, wenn eine Drehung um jeden beliebigen Winkel α um die Symmetrieachse (x_3-Achse) H auf H abbildet.
Die Drehmatrix um die x_3-Achse

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix, mit a) folgt dann die Behauptung.

Man kann die Rotationssymmetrie auch direkt zeigen:
Sei $x \in H$. Dann ist

$$d = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \\ x_3 \end{pmatrix} \in H,$$

denn

$$(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha)^2 + (x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)^2 - x_3^2 = x_1^2 \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + x_2^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - x_3^2 = 1.$$