Lineare Algebra 2
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
8.–10. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Warum gibt es eine unitäre Matrix Q, so dass für

$$A := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $t = \frac{\pi}{2}$ die Matrix $A' = Q^{-1} A\, Q$ eine Diagonalmatrix ist?
Geben Sie diese Matrix Q an und berechnen Sie A'.

Lösung: A ist normal, denn

$$AA^* = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^*A.$$

Aus dem Hauptsatz über normale Matrizen folgt die Diagonalisierbarkeit.
Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$ und $\lambda_3 = \cos\frac{\pi}{2} - i \sin\frac{\pi}{2} = -i$.
Orthogonale Eigenvektoren:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Normiert man diese drei Vektoren und schreibt sie in die Spalten von Q, so ist

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \\ 0 & -i & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unitär und

$$Q^{-1} A\, Q = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2
Beweisen Sie den Hauptsatz über reelle symmetrische Matrizen, indem Sie den Beweis des Hauptsatzes über normale Matrizen aus der Vorlesung entsprechend abwandeln. Zeigen Sie also mittels Induktion, dass zu jeder symmetrischen Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren im $\mathbb{R}^n$ existiert.

Lösung: Im eindimensionalen Fall ist $A = \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Also hat A bereits Diagonalform und die Basis e_1 leistet das Gewünschte.
Sei jetzt $n > 1$. WDas charakteristische Polynom von A (mit Vielfachheit gezählt) hat n reelle Nullstellen (Lemma 9.2.2). Wir wählen einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen dazugehörigen Eigenvektor $u \in \mathbb{R}^n$ aus und betrachten nun das sogenannte orthogonale Komplement von u in $\mathbb{R}^n$, die Menge

$$u^{\perp} := \{w \in \mathbb{R}^n |\ w \perp u\} = \left\{w \in \mathbb{R}^n |\ u_1 w_1 + \cdots + u_n w_n = 0\right\}.$$

Die Menge $V := u^{\perp}$ ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$, denn es handelt sich um die Lösungsmenge einer homogenen linearen Gleichung. Für jedes $w \in V$ gilt $Aw \in V$, denn weil A symmetrisch ist, haben wir:

$$< Aw, u > \overset{Lem.9.1.4}{=} < w, A^T u > = < w, Au > = < w, \lambda u > = \lambda < w, u > = 0.$$

Also definiert die Multiplikation mit der Matrix A eine lineare Transformation von V :

$$L : V \to V, \quad w \mapsto Aw.$$

Wir wählen für V eine Orthonormalbasis $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ (bezogen auf das von $\mathbb{R}^n$ geerbte Skalarprodukt) und erhalten so eine Orthonormalbasis $\mathscr{A} = (u, x_1, \cdots, x_{n-1})$ von $\mathbb{R}^n$. Die Matrix T, gebildet aus den Spalten $u, x_1, \cdots, x_{n-1}$, beschreibt den Basiswechsel von der kanonischen Basis zur Basis $\mathscr{A}$, und es gilt:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei B eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix ist. Weil T orthogonal und A symmetrisch ist, gilt

$$(T^{-1}AT)^t = T^t A^t (T^{-1})^t = T^{-1}AT$$

und daher $B^t = B$. Also können wir die Induktionsvoraussetzung auf B anwenden. Das heißt nach Induktion gibt es eine Orthonormalbasis $\mathscr{B} = (w_1, \cdots, w_{n-1})$ von V , die nur aus Eigenvektoren von L besteht. Fügen wir den Eigenvektor u hinzu, erhalten wir eine Orthonormalbasis $(w_1, \cdots, w_{n-1}, u)$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A wie gewünscht. q.e.d.

Aufgabe G3

a) Sei $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\right\}$ die Einheitssphäre um den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: Mit der Definition

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, wird S zu einem metrischen Raum.
Hinweis: Statt einzeln die Axiome eines metrischen Raumes nachzuweisen, überlegen Sie sich einfach, warum hier eigentlich nichts zu beweisen ist.

b) Zeigen Sie: Für $x, y \in S$ gilt

$$d(x, y) = 2 \sin\left(\frac{\measuredangle(x, y)}{2}\right).$$

c) Zeigen Sie den Satz vom Fußball: Wenn bei einem Fußballspiel der Ball zum Anfang der ersten und der zweiten Halbzeit auf den Anstoßpunkt gelegt wird, gibt es mindestens zwei Punkte auf der Oberfläche des Balles, die sich an der gleichen Stelle im umgebenden Raum befinden.

Lösung:

c) Die Drehmatrizen im $\mathbb{R}^3$ bilden eine Gruppe, die Untergruppe der speziellen orthogonalen Gruppe ist. Der Ball kann während des Spieles nur gedreht und translatiert werden. Die Translation ist hier uninteressant, da sie durch das Legen auf die Anstoßmarke ausgeglichen wird. Alle Drehungen $D_1, \cdots, D_k$ sind aber Elemente der speziellen orthogonalen Gruppe. Damit lassen sich alle k in einer Spielhälfte ausgeführten Drehungen durch Hintereinanderausführung mit einer einzigen Drehung $D := D_1 \cdots D_k$ beschreiben. Diese ist wegen der Gruppeneigenschaft der Drehgruppe wieder Element dieser. Also gibt es zwei Punkte (die Durchstoßpunkte der Drehachse zur Drehung D), die an der selben Stelle im Raum liegen.

Hausübung

Aufgabe H26
Warum gibt es eine unitäre Matrix Q, so dass für

$$A := \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & i & i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

die Matrix $A' = Q^{-1} A\, Q$ eine Diagonalmatrix ist?
Geben Sie diese Matrix Q an und berechnen Sie A'.

Lösung: A ist normal, denn

$$AA^* = \begin{pmatrix} 3 & -i & 1 \\ i & 3 & i \\ 1 & -i & 3 \end{pmatrix} = A^*A.$$

Aus dem Hauptsatz über normale Matrizen folgt die unitäre Diagonalisierbarkeit.
Das charakteristische Polynom ist $(-1+i-\lambda)^2(2+i-\lambda)$.
Damit ist $\lambda_1 = -1+i$ ein doppelter und $\lambda_3 = 2+i$ ein einfacher Eigenwert.
$A-\lambda_1 E$ hat eine Zeilenstufenform mit der Nichtnullzeile $(1\ \ -i\ \ 1)$, sie liefert die linear unabhängigen Eigenvektoren $(-1,0,1)$ und $(1,-2i,1)$. Sie wurden direkt so bestimmt, dass sie orthogonal sind. Ohne großen Rechenaufwand ergibt sich $(-i,1,-i)$ als Eigenvektor zum Eigenwert λ_3. Wie es bei normalen Matrizen sein muss, steht er senkrecht auf den Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1. Normiert man diese drei Vektoren und schreibt sie in die Spalten von Q, so ist Q unitär und $Q^{-1} A\, Q$ ist eine Diagonalmatrix mit den Einträgen -1+i, -1+i und 2+i.

Aufgabe H27
Gegeben seien $F, G \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $F(x_1,x_2,x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ und $G(x_1,x_2,x_3) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.
Zeigen Sie, dass $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto F(x)\cdot G(y)$ eine Bilinearform ist und bestimmen Sie die Matrix von s bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

Lösung:
Die Eigenschaften B1 und B2 von s folgen direkt aus der Linearität der Abbildungen F und G. Die Matrix ist ebenfalls leicht zu bestimmen:

$$M_B(s) = \Big(s(e_i,e_j)\Big)_{i,j} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H28
Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $F : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform.

a) Zeigen Sie, dass sich F analog zum Fall einer Bilinearform durch eine Matrix $[F]_B \in M_n(\mathbb{C})$ beschreiben lässt. Finden Sie die Transformationsformel für einen Basiswechsel.
b) Zeigen Sie: Ist F hermitesch, d.h. gilt $F(u,w) = \overline{F(w,u)}$, so lässt sich F durch eine geeignete Wahl einer Basis B in der Form

$$[F]_B = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

darstellen.

Lösung:

a) Wir zeigen zuerst, dass sich die Sesquilinearform F durch eine Matrix $[F]_B \in M_n(\mathbb{C})$ beschreiben lässt.
Sei $B = \left(u_1, \cdots, u_n\right)$ eine Basis von V und $a_{ij} := F(u_i, u_j)$ für $i, j = 1, \cdots, n$.
Seien $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ und $y = \sum_{j=1}^n y_j u_j$ zwei beliebige Vektoren in V. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i,\ \sum_{j=1}^n y_j u_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i F\left(u_i,\ \sum_{j=1}^n y_j u_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^n \overline{y_j} \cdot F\left(u_i,\ u_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} \overline{y_j}. \end{aligned}$$

Also ist $F(x,y) = [x]_B^T\, [F]_B\, \left[\overline{y}\right]_B$.

Sei $B' = \left(u_1', \cdots, u_n'\right)$ eine weitere Basis von V und $A' = \left(F(u_i', u_j')\right)$ die Matrix von F bezüglich B'. Dann ist die Transformationsformel für einen Basiswechsel gegeben durch

$$A' = S^T A \overline{S},$$

denn

$$a_{ij}' = F(\mathrm{v}_i', \mathrm{v}_j') = F\left(\sum_{k=1}^n s_{ki} u_k,\ \sum_{l=1}^n s_{lj} u_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n s_{ki} \overline{s_{lj}} F\left(u_k, u_l\right) = \sum_{k,l=1}^n s_{ki} a_{kl} \overline{s_{lj}}.$$

b) Sei F hermitesch. Dann ist (wie man leicht zeigt) auch die zugehörige Matrix $[F]_B$ hermitesch und es gibt (wegen Satz 9.2.3) eine unitäre Matrix Q, für die $A' = Q^{-1} A Q$ eine reelle Diagonalmatrix $A' = \operatorname{diag}\left(z_0, \cdots, z_t, z_{t+1}, \cdots, z_r, 0, \cdots, 0\right)$ ist, wobei $z_0, \cdots, z_t$ positive und $z_{t+1}, \cdots, z_r$ negative reelle Zahlen sind. Da P eine unitäre Matrix ist, gilt $Q^{-1} = Q^*$ und somit $A' = Q^* A Q$.
Setzt man nun noch $T = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{z_0}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{z_t}}, 1, \cdots, 1\right)$ und $S = QT$, so ist $D = T^* A' T = S^* A S$ eine Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonalen zunächst t mal der Wert $+1$, dann $(r - t)$ mal der Wert -1 und danach lauter Nullen stehen.