Lineare Algebra 2
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
1.–3. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ Die Summe zweier orthogonaler Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.
- ☒ Das Produkt zweier unitärer Matrizen ist wieder eine unitäre Matrix.
- ☐ Das Produkt zweier hermitescher Matrizen ist wieder hermitesch.
- ☒ Die Summe zweier schiefsymmetrischen Matrizen ist wieder schiefsymmetrisch.
- ☐ Die Summe zweier normaler Matrizen ist wieder normal.
- ☐ Das Produkt zweier symmetrischer Matrizen ist wieder symmetrisch.

Aufgabe G2 (Minitest)
Welche der folgenden Matrizen sind symmetrisch, schiefsymmetrisch, hermitesch, schiefhermitesch?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1+i & 5 \\ 5 & 1-i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -i & & \\ & \ddots & \\ & & -i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

Aufgabe G3

(a) Bestimmen Sie alle komplexen $n \times n$-Matrizen, die symmetrisch und schiefhermitesch sind.

(b) Bestimmmen Sie alle reellen 2×2-Matrizen, die orthogonal und symmetrisch sind.

Lösung:

(a) Für eine solche Matrix gilt $A^T = A = -A^* = -(\overline{A})^T$, also $A = -\overline{A}$. Die Matrix ist also symmetrisch mit rein imaginären Eintrgen. Umgekehrt ist auch jede symmetrische Matrix $B = B^T$ mit rein imaginären Einträgen schiefhermitesch.

(b) Alle orthogonalen 2×2-Matrizen sind einer der beiden Formen (vgl. 6. Übung, G2)

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in [0, 2\pi[$. Ist die Matrix von der rechten Form, so ist sie auch symmetrische. Wir betrachten deshalb nur Matrizen der linken Form. Diese Matrix ist genau dann symmetrisch, wenn $\sin(\alpha) = -\sin(\alpha)$ gilt, also für $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$. Es gibt also nur zwei orthogonale, symmetrische 2×2-Matrizen, nämlich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4
Betrachten Sie den unitären Vektorraum $M_2(\mathbb{C})$ mit dem Spur-Skalarprodukt $\langle A,B \rangle := \mathrm{Tr}(B^*A)$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $M_2(\mathbb{C})$, welche die folgende Matrix enthält:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} .$$

Lösung: Wir ergänzen die gegebenen Matrix A_1 zu einer Basis von $M_2(\mathbb{C})$ durch

$$A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Auf diese Basis von $M_2(\mathbb{C})$ wenden wir das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an.

$$\begin{aligned}
B_1 &:= A_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} , & \langle B_1, B_1 \rangle &= 1 , \\
B_2 &:= A_2 - \frac{\langle A_1, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2i & 6 \\ -2-2i & 0 \end{pmatrix} , & \langle B_2, B_2 \rangle &= \tfrac{3}{4} . \\
B_3 &:= A_3 - \frac{\langle A_3, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 - \frac{\langle A_3, B_2 \rangle}{\langle B_2, B_2 \rangle} B_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , & \langle B_3, B_3 \rangle &= \tfrac{1}{3} .
\end{aligned}$$

Die Matrix A_4 steht auf A_1, A_2, A_3 und damit auch auf B_1, B_2, B_3 senkrecht. Durch $\tilde{B}_1 := B_1 = A_1$, $\tilde{B}_2 := \sqrt{4/3}B_2$, $\tilde{B}_3 := \sqrt{3}B_3$ und $\tilde{B}_4 := A_4$ ist also eine der gesuchten Orthonormalbasen gegeben.

Aufgabe G5

(a) Sei A eine komplexe $n \times m$-Matrix und B eine komplexe $m \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass genau dann $B = A^*$, wenn für alle $x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$ bzgl. des Standardskalarproduktes gilt

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle .$$

(b) Zeigen Sie: Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann normal, wenn $\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt.

Lösung:

(a) Es gilt $\langle Ax, y \rangle = y^*Ax = (A^*y)^*x = \langle x, A^*y \rangle$. Nach Voraussetzung gilt also $\langle x, A^*y \rangle = \langle x, By \rangle$ für alle Vektoren x, y. Aus der Definitheit des Skalarproduktes folgt dann $A^*y = By$ für alle $y \in \mathbb{C}^m$, also $B = A^*$.

(b) Ist A normal, so gilt mit dem zuvor gezeigten

$$\langle A^*x, A^*y \rangle = \langle AA^*x, y \rangle = \langle A^*Ax, y \rangle = \langle Ax, (A^*)^*y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle .$$

Umgekehrt: Gilt $\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle$, so folgt mit dem zuvor Gezeigtem für alle $x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$

$$\langle x, A^*Ay \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle = \langle x, AA^*y \rangle .$$

Aus der Definitheit des Skalarproduktes ergibt sich dann $A^*Ay = AA^*y$ für alle $y \in \mathbb{C}^m$, d.h. $A^*A = AA^*$.

Hausübung

Aufgabe H23
Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix Q an, so dass die Matrix Q^TAQ diagonal ist und berechnen Sie Q^TAQ.

Lösung: Das charakteristische Polynom $p_A(t) = (t-1)^2(t-4)$ hat die Nullstellen 1 (mit Vielfachheit 2) und 4. Für letzteren findet man den (normierten) Eigenvektor $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Für Eigenwert 2 hat das System $(A - tE_3)\mathrm{v} = 0$ zwei linear unabhängige Lösungen. Eine ist z.B. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Dazu sucht man nun eine weitere, orthogonale und findet z.B. $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$. Damit erhält man

$$Q := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H24

Betrachte den euklidischen Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ aller $n \times n$-Matrizen mit Spur-Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(B^TA)$. Bezeichne mit $U_+ \subseteq M_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der symmetrischen und $U_- \subseteq M_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der schiefsymmetrischen Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass U_+ und U_- lineare Teilräume sind und dass $(U_+)^\perp = U_-$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eindeutig als Summe $A = A_+ + A_-$ aus einer symmetrischen Matrix A_+ und einer schiefsymmetrischen Matrix A_- schreiben lässt.

(c) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion π_+ auf den Teilraum U_+ und π_- auf den Teilraum U_-.

Lösung: Wir werden oft verwenden, dass für alle $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(Y^TX) \overset{\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(A^T)}{=} \mathrm{Tr}(X^TY) \overset{\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)}{=} \mathrm{Tr}(YX^T) = \left\langle X^T, Y^T \right\rangle$$

(a) Das U_+ und U_- lineare Teilräume sind, rechnet man einfach nach. Wir zeigen nur $U_+^\perp = U_-$. Sei hierfür $A \in U_+$ und $B \in U_-$. Dann gilt

$$\langle A, B \rangle = \left\langle A^T, B^T \right\rangle = -\langle A, B \rangle ,$$

also $\langle A, B \rangle = 0$. Für die Teilräume U_+ und U_- gilt somit $U_- \subseteq (U_+)^\perp$. Für die umgekehrte Inklusion sei $A \in (U_+)^\perp$, d.h $\langle A, B \rangle = 0$ für alle $B \in M_n(\mathbb{R})$ mit $B^T = B$. Dann gilt für alle $X \in M_n(\mathbb{R})$

$$\left\langle A + A^T, X \right\rangle = \langle A, X \rangle + \left\langle A^T, X \right\rangle = \langle A, X \rangle + \left\langle A, X^T \right\rangle = \left\langle A, X + X^T \right\rangle = 0 ,$$

denn die Matrix $X + X^T$ ist symmetrisch. Aus der Definitheit des Skalarproduktes ergibt sich dann $A + A^T = 0$, d.h. $A \in U_-$.

(b) Da U_+ und U_- jeweils Orthogonalräume zueinander sind, gilt $M_n(\mathbb{R}) = U_+ \oplus U_-$, d.h. jede Matrix lässt sich eindeutig als Summe einer Matrix aus U_+ und U_- darstellen.

(c) Die orthogonalen Projektionen sind durch $\pi_+(A) := \frac{1}{2}(A + A^T)$ und $\pi_-(A) := \frac{1}{2}(A - A^T)$ gegeben (vgl. z.B. Aufgabe H25).

Aufgabe H25

Zeigen Sie, dass für eine reelle $n \times n$-Matrix P die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Es gilt $P^2 = P = P^T$.

(b) Die Matrix P ist symmetrisch und hat keine von 0 und 1 verschiedenen Eigenwerte.

(c) Die durch P gegebenen lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Px$ ist eine orthogonale Projektion.

Hinweis: Auf welchen Teilraum projiziert P?

Lösung:

(a) Wir zeigen die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ und müssen dazu nur zeigen, dass 0 und 1 die einzigen möglichen Eigenwerte sein können. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von P zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lambda x = Px = P^2x = \lambda Px = \lambda^2 x$. Wegen $x \neq 0$ folgt daraus $\lambda^2 = \lambda$, also $\lambda \in \{0, 1\}$.

(b) Wir zeigen die Implikation $(b) \Rightarrow (c)$. Bezeichne U den Eigenraum zum Eigenwert 1. Nach dem Hauptsatz für symmetrische Matrizen zerfällt $\mathbb{R}^n$ in eine orthogonale Summe der Eigenräumen, d.h. $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$. Wir wählen eine ONB $x_1, \ldots, x_k$ von U und ergänzen zu einer ONB $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathbb{R}^n$. Die Vektoren $x_{k+1}, \ldots, x_n$ liegen dann im Eigenraum zum Eigenwert 0. Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dann $x = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i$ und somit

$$Px = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle Px_i = \sum_{i=1}^k \langle x, x_i \rangle x_i + 0 ,$$

d.h. P ist eine orthogonale Projektion.

(c) Die Implikation $(c) \Rightarrow (a)$ kann man einfach direkt nachrechnen.