Lineare Algebra 2
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
25.–27. Mai 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonale Matrizen?

$$(1)\,, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{-12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}\,, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie alle reellen, oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen, die orthogonal sind.

Aufgabe G2

Seien V, W zwei euklidische Vektorräume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. Zeigen Sie, dass auf dem direkten Produkt $V \times W$ ein Skalarprodukt gegeben ist durch

$$\big\langle (\mathsf{v}_1, w_1), (\mathsf{v}_2, w_2) \big\rangle := \langle \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2 \rangle_V + \langle w_1, w_2 \rangle_W \,.$$

Aufgabe G3

Betrachten Sie $\mathbb{R}^5$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie einen Basis des Orthogonalraumes $U^\perp$ zu dem linearen Teilraum U, der von den folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$(1,2,3,0,0)^T\,, \qquad (0,0,0,0,1)^T\,, \qquad (1,0,2,0,1)^T\,, \qquad (0,4,2,0,0)^T\,.$$

Lösung: Bezeichne mit $\mathsf{v}_1, \dots, \mathsf{v}_4$ die Vektoren in der Aufgabenstellung. Dann gilt

$$U^\perp = \{\mathsf{v}_1, \dots, \mathsf{v}_4\}^\perp = \{\mathsf{v}_1\}^\perp \cap \dots \cap \{\mathsf{v}_4\}^\perp \,.$$

Wir müssen also das Gleichungsssystem $Ax = 0$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathsf{v}_1^T \\ \mathsf{v}_2^T \\ \mathsf{v}_3^T \\ \mathsf{v}_4^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Die Lösungsmenge $U^\perp$ besteht aus allen Linearkombinationen der Vektoren $x_1 := (4,1,-2,0,0)^T$ und $x_2 := (0,0,0,1,0)^T$.

Aufgabe G4

Betrachten Sie $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Zeigen Sie:

(a) Jedes Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^n$ lässt sich zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ ergänzen.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Teilraum und $\pi : V \to V$ die orthogonale Projektion auf U. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^n$, so dass die Matrix von π bzgl. $\mathscr{B}$ die folgende Gestalt hat:

$$[\pi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} .$$

(c) Zu je zwei Einheitsvektoren $\mathrm{v}, w \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine orthogonale Matrix $Q \in O_n(\mathbb{R})$ mit $Q\mathrm{v} = w$.[1]
Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $\mathrm{v} = e_1$.

Lösung:

(a) Jedes Orthonormalsystem besteht aus linear unabhängigen Vektoren. Diese lassen sich zu einer Basis ergänzen. Mittels des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren lässt sich diese Basis dann in eine Orthonormalbasis überführen. Da beim Gram-Schmidt-Verfahren bereits orthogonale Vektoren unverändert bleiben, ist die so erhaltene Orthonormalbasis eine Erweiterung des Orthonormalsystems.

(b) Wir wählen eine eine ONB $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_k$ von U und eine ONB $w_1, \dots, w_\ell$ von $U^\perp$. Wegen $V = U \oplus U^\perp$ und weil Vektoren aus U und $U^\perp$ stets orthogonal zueinander stehen, ist dann $\mathscr{B} := (\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_k, w_1, \dots, w_\ell)$ eine ONB von V. Für die orthogonale Projektion π auf U gilt $\pi(\mathrm{v}_i) = \mathrm{v}_i$ und $\pi(w_j) = 0$ für jedes i, j. Somit hat die Matrix von π bzgl. der Basis $\mathscr{B}$ die gewünschte Gestalt.

(c) Sei $w \in \mathbb{R}^n$. Dann können wir w zu einer ONB $w_1 := w, w_2, \dots, w_n$ ergänzen. Die Matrix $Q := (w_1 | \dots | w_n)$ ist dann orthogonal mit $Qe_1 = w$. Wir haben also gezeigt, dass es für jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Matrix mit $Qe_1 = w$ gibt.

Seien nun $\mathrm{v}, w \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es nach dem Gezeigten orthogonale Matrizen $Q_\mathrm{v}, Q_w \in O_n(\mathbb{R})$ mit $Q_\mathrm{v} e_1 = \mathrm{v}$ und $Q_w e_1 = w$. Die Matrix $Q := Q_w Q_\mathrm{v}^{-1}$ ist dann auch orthogonal mit

$$Q\mathrm{v} = Q_w Q_\mathrm{v}^{-1} \mathrm{v} = Q_w e_1 = w .$$

Hausübung

Aufgabe H20
Es sei V ein euklidischer Raum $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Ist φ längentreu, so ist φ winkeltreu, d.h. für je zwei Vektoren $0 \neq \mathrm{v}, w \in V$ ist der Winkel zwischen diesen Vektoren gleich dem zwischen ihren Bildvektoren $\varphi(\mathrm{v}), \varphi(w)$. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Lösung: Aus der Polarisationsformel folgt, dass jede längenerhaltende Abbildung auch das Skalarprodukt und damit die Winkel erhällt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Z.B. ist jedes Vielfache der Identität $\varphi = \lambda \,\mathrm{id}_V$ auf einem euklidischen Raum V zwar winkeltreu, jedoch für $|\lambda| \neq 1$ nicht längentreu.

Aufgabe H21 (Spiegelung an einer Hyperebene)
Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $\mathrm{v} \in V$ ein Einheitsvektor. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\sigma_\mathrm{v} : V \to V, \quad x \mapsto x - 2\langle x, \mathrm{v} \rangle \mathrm{v} .$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung σ_v ist eine orthogonale Abbildung.

(b) Der von v aufgespannte Teilraum $\mathbb{R}\mathrm{v}$ ist der Eigenraum von σ_v zum Eigenwert -1 und sein Orthogonalraum der Eigenraum zum Eigenwert 1.

Seien nun $\mathrm{v}, w \in V$ zwei Einheitsvektoren. Bezeichne U den von v und w aufgespannten linearen Teilraum. Betrachten Sie die linearen Abbildungen σ_v und σ_w. Zeigen Sie:

(c) Der Teilraum U ist σ_v-invariant und σ_w-invariant, d.h. es gilt $\sigma_\mathrm{v}(U) \subseteq U$ und $\sigma_w(U) \subseteq U$.

[1] D.h. die Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ wirkt transitiv auf der Einheitssphäre $S := \{\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathrm{v}\| = 1\}$.

(d) Für alle $x \in U^{\perp}$ gilt $\sigma_{\mathsf{v}}(x) = x = \sigma_w(x)$.

(e) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i. Die Vektoren v und w sind linear abhängig oder orthogonal zueinander.

ii. Die Abbildungen σ_{v} und σ_w kommutieren, d.h. $\sigma_{\mathsf{v}} \circ \sigma_w = \sigma_w \circ \sigma_{\mathsf{v}}$.

Lösung:

(a) Die Abbildung ist bijektiv mit $\sigma_{\mathsf{v}} \circ \sigma_{\mathsf{v}} = \mathrm{id}_V$ (nachrechnen!). Ausserdem ist sie isometrisch, denn für alle $x_1, x_2 \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{\mathsf{v}}(x_1, \sigma_{\mathsf{v}}(x_2) \rangle &= \langle x_1 - 2\langle x_1, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v}, x_2 - 2\langle x_2, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v} \rangle \\ &= \langle x_1, x_2 \rangle - 2\langle x_1, \mathsf{v} \rangle \langle x_2, \mathsf{v} \rangle - 2\langle x_1, \mathsf{v} \rangle \langle \mathsf{v}, x_2 \rangle + 4\langle x_1, \mathsf{v} \rangle \langle x_2, \mathsf{v} \rangle \langle \mathsf{v}, \mathsf{v} \rangle \\ &= \langle x_1, x_2 \rangle \,.\end{aligned}$$

(b) Es gilt $\sigma_{\mathsf{v}}(\mathsf{v}) = \mathsf{v} - 2\langle \mathsf{v}, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v} = -\mathsf{v}$, d.h. $U = \mathbb{R}\mathsf{v}$ ist kleiner gleich dem Eigenraum zum Eigenwert -1. Für jeden Vektor $x \in U^{\perp}$ gilt $\sigma_{\mathsf{v}}(x) = x - 2\langle x, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v} = x$, d.h. $U^{\perp}$ ist kleiner gleich dem Eigenraum zum Eigenwert 1. Wegen $V = U \oplus U^{\perp}$ müssen U und $U^{\perp}$ mit dem entspr. Eigenräumen übereinstimmen.

(c) Es genügt die Behauptung für σ_{v} zu zeigen. Für σ_w ergibt sich die Behauptung durch Vertauschen der Rollen von v und w. Weiter genügt es $\sigma_{\mathsf{v}}(\mathsf{v}) \in U$ und $\sigma_{\mathsf{v}}(w) \in U$ zu zeigen, denn σ_{v} ist linear und jeder andere Vektor in U ist eine Linearkombination von v und w.

Für den Vektor v gilt $\sigma_{\mathsf{v}}(\mathsf{v}) = -\mathsf{v} \in U$ (s.o.), für den Vektor w gilt $\sigma_{\mathsf{v}}(w) = w - 2\langle w, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v} \in U$.

(d) Auch hier genügt es die Aussage für σ_{v} zu zeigen: Sei $x \in U^{\perp}$, also insbesondere $\langle x, \mathsf{v} \rangle = 0 = \langle x, w \rangle$. Dann gilt $\sigma_{\mathsf{v}}(x) = x - \langle x, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v} = x$.

(e) Seien zuerst v, w linear abhängig oder orthogonal zueinander. Zum einen lässt sich direkt zeigen, dass die Abbildungen vertauschen. Man kann die Behauptung jedoch auch aus bereits gezeigtem Herleiten: Wegen $V = U \oplus U^{\perp}$ genügt es die Gleichung $\sigma_{\mathsf{v}} \circ \sigma_w = \sigma_w \circ \sigma_{\mathsf{v}}$ auf U und auf $U^{\perp}$ einzeln zu zeigen. Auf $U^{\perp}$ haben wir direkt zuvor gezeigt, dass σ_{v} und σ_w beide die Identität sind, insbesondere also vertauschen. Auf U müssen wir die Gleichheit auf den zwei Vektoren v, w nachweisen.

Sind v und w linear abhängig, so haben wir zuvor gezeigt, dass U für $\sigma_{\mathsf{v}}, \sigma_w$ der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist. Die Abbildungen sind beide also ein Vielfaches der Identität auf diesem Teilraum. Insbesondere vertauschen sie. Stehen v und w orthogonal zueinander, so liegt nach (b) der Vektor w im Fixraum von σ_{v} (und umgekehrt für den v und σ_w), d.h. es gilt

$$\sigma_{\mathsf{v}}\big(\sigma_w(w)\big) = \sigma_{\mathsf{v}}(-w) = -w = \sigma_{\mathsf{v}}(-w) = \sigma_w\big(\sigma_{\mathsf{v}}(w)\big)$$

und analog für den Vektor v. Zusammengefasst haben wir damit die erste Implikation gezeigt.

Wir nehmen nun an, die Abbildungen $\sigma_{\mathsf{v}}, \sigma_w$ kommutieren. Für alle $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned}(\sigma_{\mathsf{v}} \circ \sigma_w)(x) &= x - 2\langle x, w \rangle w - 2\langle x, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v} + 4\langle x, w \rangle \langle w, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v} \,, \\ (\sigma_w \circ \sigma_{\mathsf{v}})(x) &= x - 2\langle x, \mathsf{v} \rangle \mathsf{v} - 2\langle x, w \rangle w + 4\langle x, \mathsf{v} \rangle \langle \mathsf{v}, w \rangle w \,.\end{aligned}$$

Speziell für $x = \mathsf{v}$ folgt dann $\langle \mathsf{v}, w \rangle w = \langle \mathsf{v}, w \rangle^2 \mathsf{v}$. Die Vektoren v, w sind also entweder orthogonal, d.h. $\langle \mathsf{v}, w \rangle = 0$, oder linear abhängig.

Aufgabe H22

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit einer abzählbar unendlichen Basis $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass es eine abzählbar unendliche Orthonormalbasis von V gibt, d.h. es gibt eine Basis $(\mathsf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von V mit $\left\langle \mathsf{v}_i, \mathsf{v}_j \right\rangle = \delta_{i,j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir wenden das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis $(b_n)_n$ an und erhalten induktiv Vektoren

$$w_n := b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle b_n, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k$$

Nach dem für das Gram-Schmidt-Verfahren Gezeigtem sind die Vektoren $\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_n$ mit $\mathsf{v}_k := w_k / \left\| w_k \right\|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Orthonormalbasis des von den Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ aufgespannten linearen Teilraums. Die Familie aller Vektoren $(\mathsf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit ein System normierter, orthogonales Vektoren, die den gleichen Teilraum aufspannen, wie die Vektoren $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also ganz V. D.h. die Vektoren $(\mathsf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine Orthonormalbasis von V.