Lineare Algebra 2
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
18.–20. Mai 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Betrachte $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und die folgenden Vektoren:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis des Untervektorraumes U, der von den Vektoren $b_1, \dots, b_4$ aufgespannt wird.

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $x := (1, 1, 1, 1)^T$ auf den linearen Teilraum U.

Lösung:

(a) Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren bestimmen wir eine Orthogonalbasis für den Teilraum

$$\tilde{b}_1 := b_1 , \qquad \left\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_1 \right\rangle = 9 ,$$

$$\tilde{b}_2 := b_2 - \frac{\left\langle b_2, \tilde{b}_1 \right\rangle}{\left\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_1 \right\rangle} \tilde{b}_1 = b_2 + \tfrac{2}{9} b_1 = \tfrac{5}{9}(0, -1, -1, 4)^T , \qquad \left\langle \tilde{b}_2, \tilde{b}_2 \right\rangle = \tfrac{50}{9} ,$$

$$\tilde{b}_3 := b_3 - \frac{\left\langle b_3, \tilde{b}_1 \right\rangle}{\left\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_1 \right\rangle} \tilde{b}_1 - \frac{\left\langle b_3, \tilde{b}_2 \right\rangle}{\left\langle \tilde{b}_2, \tilde{b}_2 \right\rangle} \tilde{b}_2 = b_3 - \tfrac{1}{9} \tilde{b}_1 - \tfrac{2}{5} \tilde{b}_2 = 0 ,$$

$$\tilde{b}_4 := b_4 - \frac{\left\langle b_4, \tilde{b}_1 \right\rangle}{\left\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_1 \right\rangle} \tilde{b}_1 - \frac{\left\langle b_4, \tilde{b}_2 \right\rangle}{\left\langle \tilde{b}_2, \tilde{b}_2 \right\rangle} \tilde{b}_2 = b_4 + \tfrac{1}{9} \tilde{b}_1 + \tfrac{2}{5} \tilde{b}_2 = (1, -1, 1, 0) .$$

Die erhaltenen Vektoren $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_4$ normieren wir noch zu einer Orthonormalbasis $\frac{1}{3}(0, 2, 2, 1)^T$, $\frac{2}{3}\sqrt{2}(0, -1, -1, 4)^T$ und $\frac{1}{3}\sqrt{3}(1, -1, 1, 0)^T$.

Aufgabe G2
Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sowohl durch die zwei Vektoren

$$b_1^+ := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad b_2^+ := \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

als auch durch die zwei Vektoren

$$b_1^- := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad b_2^- := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

eine Orthonormalbasis gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ von der Form (1) oder (2) ist.

Lösung:

(a) Einfach nachrechnen.

(b) Sei $x = (x_1, x_2)^T$ der erste Vektor der Orthonormalbasis. Dann gilt $-1 \le x_1, x_2 \le 1$ und $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Es gibt somit genau ein $t_x \in [0, 2\pi[$ mit $x_1 = \cos(t)$ und $x_2 = \sin(t)$. Analog gibt es für den zweiten Vektor $y = (y_1, y_2)^T$ genau ein $t_y \in [0, 2\pi[$ mit $y_1 = \cos(t_y)$ und $y_2 = \sin(t_y)$. Wegen der Orthogonalität der Vektoren gilt mit den Additionstheoremen

$$0 = \cos(t_x)\cos(t_y) + \sin(t_x)\sin(t_y) = \cos(t_x - t_y)\,.$$

Die Winkel $t_x, t_y \in [0, 2\pi[$ unterscheiden sich also um $\frac{1}{2}\pi$ oder um $\frac{3}{2}\pi$. Durch abarbeiten der vier Fälle $t_y = t_x \pm \frac{1}{2}\pi$ und $t_y = t_x \pm \frac{3}{2}\pi$ ergibt sich dann die Behauptung.

Aufgabe G3

Betrachte $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $x = (x_1, \ldots, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ein beliebiger Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bilden:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_4 \\ -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Nachrechnen, stimmt.

Aufgabe G4 (Hadamard-Matrizen, ein offenes Problem)

Das folgende Problem ist noch immer offen bzw. nur unvollständig gelöst. Versuchen Sie sich doch einmal an der Lösung: Für welche Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Orthogonalbasis (Basis aus orthogonalen Vektoren) von $\mathbb{R}^n$, die nur aus Vektoren mit den Einträgen $+1$ und -1 besteht?[1]

Hausübung

Aufgabe H17

Finden Sie eine Orthonormalbasis des folgenden linearen Teilraums von $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt:

$$U := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}\,.$$

Lösung: Der Teilraum ist 2-dimensional mit Basis $(1, -1, 0$ und $(0, 1, -1)$. Z.B. durch das Gram-Schmidt-Verfahren können wir diese Basis in eine Orthonormalbasis umwandeln. So erhalten wir z.B. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$ und $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T$

Aufgabe H18

Betrachte $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ den Raum der reellen Polynomfunktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, p, q \,\rangle := \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis des Unterraumes, der von den Funktionen p_0, p_1, p_2, p_3 mit $p_k(x) := x^k$ aufgespannt wird.

Die so erhaltenen Polynome heißen diese Polynome (bis auf Normierung) *Legendre-Polynome*.

(b) Wir bezeichnen mit $U \subseteq V$ den von den Polynomen p_0, p_1, p_2 aufgespannten linearen Teilraum. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $p_4(x) := x^4$ auf den Teilraum U.

Lösung:

(a) Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert die Vektoren

$$q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad q_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x\,, \qquad q_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)\,, \qquad q_3(x) = \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x)\,.$$

[1] Eine aus solchen Vektoren bestehende Matrix nennt man auch *Hadamard-Matrix*, benannt nach dem französischen Mathematiker Jacques S. Hadamard.

Aufgabe H19
Sei V der Vektorraum der komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bei denen nur endlich viele a_n von Null verschieden sind. Wir definieren ein Skalarprodukt auf V durch

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{b_n} \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass V mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein unitärer Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge von V ein echter linearer Teilraum ist:

$$U := \left\{ (a_n)_n \in V \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0 \right\} .$$

(c) Bestimmen Sie den Orthogonalraum $U^{\perp}$. *Hinweis:* Können Sie ein paar „einfache“ Vektoren in U finden?

Lösung:

(a) Axiome nachweisen.

(b) Die Axiome eines linearen Teilraums lassen sich leicht direkt nachweisen. Der Teilraum ist echt, weil z.B. der Vektor $(1, 0, 0, 0, \dots)$ nicht in U liegt.

(c) Sei $b = (b_n)_n \in V$ ein Vektor im Orthogonalraum $U^{\perp}$. Die Vektoren $a^{(n)}$ mit

$$\begin{aligned} a^{(1)} &:= (1, -1, 0, 0, 0, \dots) , \\ a^{(2)} &:= (0, 1, -1, 0, 0, \dots) , \\ a^{(3)} &:= (0, 0, 1, -1, 0, 0, \dots) , \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

liegen alle in U. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt aus $\left\langle b, a^{(n)} \right\rangle = 0$ dann $b_n = b_{n+1}$. Die Folge $b = (b_n)$ muss somit konstant sein. Die einzige Konstante Folge in V ist jedoch die konstante Nullfolge. D.h. es gilt $U^{\perp} = \{0\}$.