Lineare Algebra 2
5. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
11.–13. Mai 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ähnlichkeit)
Welche der folgenden Matrizen sind zueinander ähnlich?

$$A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_5 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A_7 := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_9 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Betrachtet man die Spur der Matrizen, so ergibt sich, dass A_1 und A_3 zu keiner der anderen Matrizen äquivalent sein können. A_1 hat Rang 2, während A_3 invertierbar ist. Somit ist sowohl A_1 als auch A_3 zu keiner der anderen Matrizen äquivalent.
Die Matrizen A_8 und A_9 haben drei verschiedenen Eigenwerte $1, 2, 3$ (diagonalisierbar) und sind somit äquivalent.
Aus den Spuren ergibt sich auch, dass A_6 zu keiner der anderen Matrizen äquivalent ist.
Betrachtet man die Determinante so ergibt sich weiter, dass die Matrizen A_2, A_4, A_5 und A_7 zu keiner der anderen Matrizen äquivalent sein können. All diese Matrizen haben 2 als einzigen Eigenwert. Bei den Matrizen A_2 hat er die geometr. Vielfachheit 1, bei A_4 und A_7 die geometr. Vielfachheit 2 und bei A_5 die geometr. Vielfachheit 3. Somit sind höchstens A_4 und A_7 äquivalent.
Für A_4 und A_7 versuchen wir explizit eine Transformationsmatrix S mit $SA_4S^{-1} = A_7$ zu konstruieren. Da $(1,0,0)^T$ und $(0,1,0)^T$ Eigenwerte von A_4 sind, müssen die Spalten $S(1,0,0)^T$ und $S(0,1,0)^T$ Eigenvektoren von A_7 sein. Analog muss die Spalte $S(0,0,1)^T$ ein Nicht-Eigenvektor von A_7 sein. Wir wählen hierfür den Vektor $(0,1,0)^T$. (Später in der Vorlesung werden wir sehen, dass wir hier einen beliebigen anderen Nicht-Eigenvektor wählen können.) Für $SA_4S^{-1} = A_7$ muss dann auch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = A_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = SA_2S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = SA_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

gelten. Aus $(4,0,2)^T = 4(1,0,0)^T + 2(0,0,1)^T$ ergibt sich dann, dass wir $S(1,0,0)^T := (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ setzen müssen. Für $S(0,1,0)^T$ können wir nun jeden von $S(1,0,0)^T$ linear unabhängigen Eigenvektor von A_7 wählen, z.B. $S(1,0,0)^T := (0,0,1)^T$. Durch die drei Spalten Se_1, Se_2 und Se_3 ist die Matrix dann eindeutig bestimmt. Die Gleichung $SA_4S^{-1} = A_7$, oder einfacher $SA_4 = A_7S$ rechnet man leicht nach.

Aufgabe G2 (Polarisationsformel)
Sei V ein komplexer Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie, dass dann für alle $\mathsf{v}, w \in V$ gilt

$$\langle \mathsf{v}, w \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\| \mathsf{v} + i^k w \right\|^2 .$$

Lösung: Die rechte Seite in ein Skalarprodukt umschreiben und rechnen, rechnen, rechnen.

Aufgabe G3
Betrachten Sie den Vektorraum $V := \mathbb{R}[t]$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Wir betrachten auf $\mathbb{R}[t]$ die Ableitung

$$\varphi : V \longrightarrow V, \quad p \mapsto p' ,$$

wobei die Ableitung eines Polynoms $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ wie üblich durch $p'(t) := \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k t^{k-1}$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass es kein Polynom $0 \neq Q \in \mathbb{R}[t]$ mit $Q(\varphi) = 0$ gibt.

Lösung: Sei $0 \neq Q(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ ein Polynom, d.h. $a_N \neq 0$ für ein $N \in \{0, \dots, n\}$. Betrachte die Abbildung $Q(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k$ an dem Vektor $p(t) := t^N$. Dann gilt

$$\big(Q(\varphi)(p)\big)(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N(N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1) \cdot t^{N-k} ,$$

wobei $p^{(k)}$ die k-te Ableitung von p bezeichnet. Wegen $a_N \neq 0$ folgt auch $a_N N! \neq 0$, d.h. das Polynom $Q(\varphi)(p)$ ist von Null verschieden. Somit kann $Q(\varphi)$ nicht die Nullabbildung sein.

Hausübung

Aufgabe H14 (Ähnlichkeit von 2×2-Matrizen)
Zeigen Sie, dass für zwei komplexe 2×2-Matrizen A, B die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Matrizen A und B sind ähnlich.

(b) Das Minimalpolynom von A und B sind gleich.

Zusatzaufgabe: Gilt diese Äquivalenz auch für reelle 2×2-Matrizen?

Lösung: Die Implikation $\Rightarrow$ haben wir bereits gezeigt. Wir zeigen deshalb nur die umgekehrte Implikation. Seien also $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ mit gleichem Minimalpolynom $M(t)$.
Hat das Minimalpolynom den Grad 2, so ist es von der Form $M(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, weil über $\mathbb{C}$ alle Polynome in Linearfaktoren zerfallen. Gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so sind λ_1 und λ_2 beides Eigenwerte sowohl von A als auch von B mit geometrischer und algebraischer Vielfachheit 1. Die Matrizen A und B sind also ähnlich. Gilt $\lambda_1 = \lambda_2$ so handelt es sich für A und B um einen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 und geometrischer Vielfachheit 1. Die Matrizen sind also ähnlich.

Hat das Minimalpolynom nicht Grad 2, so hat es Grad 1 und ist damit von der Form $M(t) = t - \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Somit ist λ der einzige Eigenwert sowohl von A als auch von B mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 2. Die Matrizen sind also ähnlich.
Bemerkung: Die Matrizen sind sogar gleich. Als alternatives Argument kann man nutzen, dass das Minimalpolynom für die Matrizen A und B verschwindet. Daraus ergibt sich direkt $A = \lambda E = B$.

Aufgabe H15 (Gleichheit bei Cauchy-Schwarz)
Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass für alle Vektoren $\mathsf{v}, w \in V$ die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathsf{v}, w \rangle| \leq \|\mathsf{v}\| \cdot \|w\|$$

gilt. Zeigen Sie, dass bei dieser Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, d.h. $|\langle \mathsf{v}, w \rangle| = \|\mathsf{v}\| \cdot \|w\|$, wenn v und w linear abhängig sind.

Lösung: Der Vektor $\frac{\langle \mathsf{v}, w \rangle}{\|w\|^2} w$ ist die senkrechte Projektion von v auf die von w aufgespannte Ursprungsgerade. Wir wollen zeigen, dass dies der Vektor v selbst ist, d.h. $\|w\|^2 \mathsf{v} = \langle \mathsf{v}, w \rangle w$. Dazu berechnen wir die Norm dieses Vektors:

$$\begin{aligned}
\Big\| \|w\|^2 \mathsf{v} - \langle \mathsf{v}, w \rangle w \Big\|^2 &= \Big\langle \|w\|^2 \mathsf{v} - \langle \mathsf{v}, w \rangle w,\ \|w\|^2 \mathsf{v} - \langle \mathsf{v}, w \rangle w \Big\rangle \\
&= \|w\|^4 \cdot \|\mathsf{v}\|^2 - \|w\|^2 \cdot |\langle \mathsf{v}, w \rangle|^2 - \|w\|^2 \cdot |\langle \mathsf{v}, w \rangle|^2 + |\langle \mathsf{v}, w \rangle|^2 \cdot \|w\|^2 \\
&= \|w\|^2 \big(\|w\|^2 \|\mathsf{v}\|^2 - |\langle \mathsf{v}, w \rangle|^2 \big) .
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $|\langle \mathsf{v}, w \rangle|^2 = \|\mathsf{v}\| \cdot \|w\|$, die Norm verschwindet also. Es folgt $\|w\|^2 \mathsf{v} - \langle \mathsf{v}, w \rangle w = 0$.

Aufgabe H16 (Komplexifizierung euklidischer Räume)
Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir betrachten den reellen Vektorraum $V_{\mathbb{C}} := V \times V$ und definieren eine komplexe Skalarmultiplikation auf $V_{\mathbb{C}}$ durch

$$(x + iy) \cdot (\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2) := (x \cdot \mathsf{v}_1 - y \cdot \mathsf{v}_2, x \cdot \mathsf{v}_2 + y \cdot \mathsf{v}_1)$$

für $(\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2) \in V_{\mathbb{C}}$ und $x, y \in \mathbb{R}$, d.h. $x + iy \in \mathbb{C}$ (ohne Nachweis, vgl. 9. Tutorium im letzten Semester).
Mit dieser Skalarmultiplikation wird $V_{\mathbb{C}}$ zu einem komplexen Vektorraum. Zeigen Sie, dass durch

$$\Big\langle (\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2), (\mathsf{v}_1', \mathsf{v}_2') \Big\rangle_{\mathbb{C}} := \Big\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_1' \Big\rangle - i \Big\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2' \Big\rangle + i \Big\langle \mathsf{v}_2, \mathsf{v}_1' \Big\rangle + \Big\langle \mathsf{v}_2, \mathsf{v}_2' \Big\rangle .$$

ein hermitesches Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{C}}$ definiert ist, d.h. $V_{\mathbb{C}}$ ist mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ ein unitärer Vektorraum.

Lösung: Nachrechnen, stimmt.