Lineare Algebra 2
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
4.–6. Mai 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Nehmen Sie zu folgendem „Beweis“ des Satzes von Cayley-Hamilton Stellung:

$$p_A(A) = \det(A - A \cdot E) = \det(A - A) = \det(0) = 0\,.$$

Aufgabe G2 (Trigonalisieren)
Bestimmen Sie eine obere Dreiecksmatrix, die ähnlich zur folgenden Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der Matrix A ist $P_A(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = -(t-1)^3$. Der einzige Eigenwert ist somit $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3. Der zugeh. Eigenraum ist eindimensional mit Eigenvektor $\mathsf{v}_1 := (1, -1, 1)^T$. Wir betrachten deshalb zuerst die Basis (v_1, e_2, e_3) und die entspr. Transformationsmatrix T_1 mit

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Im nächsten Schritt müssen wir dann die 2×2-Untermatrix $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ trigonalisieren. Der bis auf Vielfache einzige Eigenvektor zum einzigen Eigenwert 1 ist hier $\mathsf{v}_2 = (1, -1)^T$. Wir betrachten deshalb die Basis (v_2, e_2) und die zugeh. Transformationsmatrix T_2 mit

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad T_2^{-1}BT_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Insgesamt ergibt sich die Transformationsmatrix

$$\tilde{T} := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & T_2 \end{array}\right) \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\tilde{T}^{-1}A\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G3 (Invarianten unter Ähnlichkeit)

(a) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen die gleiche Determinante, die gleiche Spur und das gleiche charakteristische Polynom haben.

(b) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen das gleiche Minimalpolynom haben.

(c) Finden Sie jeweils zwei 3×3-Matrizen mit gleicher Determinante / gleicher Spur / gleichem charakteristischem Polynom / gleichem Minimalpolynom, die nicht ähnlich sind.

Lösung:

(a)

$$\det(S^{-1}AS) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A)\,,$$
$$\mathrm{Tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{Tr}(SS^{-1}A) = \mathrm{Tr}(A)\,,$$
$$P_{S^{-1}AS}(t) = \det(S^{-1}AS - tE) = \det(S^{-1}AS - tS^{-1}S) = \det(S)^{-1}\det(A - tE)\det(S) = \det(A - tE) = P_A(t)\,.$$

(b) Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[t]$ mit $P(A) = 0$ gilt auch $P(S^{-1}AS) = S^{-1}P(A)S = 0$. Das Minimalpolynom von $S^{-1}AS$ ist somit ein Teiler des Minimalpolynoms von A. Analog ist auch das Minimalpolynom von A ein Teiler des Minimalpolynoms von $S^{-1}AS$. Somit haben A und $S^{-1}AS$ das gleiche Minimalpolynom.

(c) Betrachte z.B. die 3 Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen sind nicht paarweise ähnlich: A und B haben verschiedene Minimalpolynome. A und C sowie B und C haben verschiedene Spur.

Aufgabe G4

(a) Sei A eine 2×2-Matrix. Schreiben Sie das charakteristische Polynom von A mit Hilfe der Determinante und der Spur von A.

(b) Schreiben Sie A^2 als Linearkombination von A und E.

(c) Sei nun A eine $n \times n$-Matrix. Wie groß kann der von den Potenzen $E, A, A^2, \ldots$ aufgespannte lineare Teilraum von $M_n(\mathbb{K})$ höchstens werden?

Lösung:

(a) $P_A(t) = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + \det(A)$.

(b) Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $P_A(A) = 0$, also $A^2 = \mathrm{Tr}(A) \cdot A - \det(A) \cdot E$.

(c) Sei $P_A(t) := (-1)^n t^n + \sum_{k=-}^{n-1} a_k t^k$ das charakteristische Polynom von A. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $P_A(A) = 0$, also $A^n = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$. Die n-te Potenz A^n und damit (durch Induktion) auch jede größere Potenz liegt dann in dem von $E = A^0, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ aufgespannten linearen Teilraum. Der von allen Potenzen aufgespannte Teilraum hat somit höchstens Dimension n.

Hausübung

Aufgabe H11

Bestimmen Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen mit komplexen Einträgen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom $P_A(t) = t^2 - t + 6$ hat keine reelle Nullstelle, also zwei verschiedene komplexe Nullstellen. Somit ist das Minimalpolynom gleich dem charakteristischen Polynom.

Das charakteristische Polynom von B ist $P_B(t) = (t-2)^3(t-3)$. Das Minimalpolynom muss also eines der drei Polynome $(t-2)(t-3)$, $(t-2)^2(t-3)$ und $(t-2)^3(t-3)$ sein. Man rechnet leicht nach, dass $(B-2E)(B-3E) \neq 0$, aber $(B-2E)^2(B-3E) = 0$ gilt. Somit ist $M_B(t) = (t-2)^2(t-3)$ das Minimalpolynom von B.

Aufgabe H12
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Sei $X \in M_{n+m}(\mathbb{K})$ = eine obere Block-Dreiecksmatrix

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

mit Untermatrizen $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass für die jeweiligen charakteristischen Polynome P_X, P_A und P_B gilt:

$$P_X(t) = P_A(t) \cdot P_D(t) \,.$$

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom:

$$A_1 := \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

(c) Verallgemeinert sich die Aussage aus (a) über charakteristische Polynome auch auf Minimalpolynome?

Lösung:

(a) Die Aussage folgt direkt aus der entspr. Rechenregel für Determinanten solcher Blockmatrizen.

(b) In allen drei Fällen ist das charakteristische Polynom durch $P(t) = (\lambda - t)^3$ gegeben. Als Minimalpolynom kommen damit nur $(t - \lambda)$, $(t - \lambda)^2$ und $(t - \lambda)^3$ in Frage. Man sieht sofort, dass

$$A_1 - \lambda E = 0 \,, \qquad A_2 - \lambda E \neq 0 \,, \qquad A_3 - \lambda E \neq 0$$

gilt. Das Minimalpolynom von A_1 ist somit $M_1(t) = t - \lambda$. Weiter rechnet man leicht nach, dass

$$(A_2 - \lambda E)^2 = 0 \,, \qquad (A_3 - \lambda E)^2 \neq 0$$

gilt. Das Minimalpolynom von A_2 ist also $M_2(t) = (t - \lambda)^2$, da von A_3 ist $M_3(t) = (t - \lambda)^3$.

(c) Die Gleichung $M_X(t) = M_A(t) \cdot M_D(t)$ ist i.A. nicht wahr. Betrachte z.B. die Einheitsmatrix $E \in M_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe H13 (Nilpotente Matrizen)
Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt *nilpotent*, falls es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Für eine nilpotente $n \times n$-Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ gilt $A^n = 0$ (mit gleichem n).

(b) Eine komplexe Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist genau dann nilpotent, wenn sie außer Null keine weiteren Eigenwerte besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass jede komplexe nilpotente Matrix zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix ähnlich ist.

Lösung:

(a) Wegen $A^k = 0$ ist das Minimalpolynom ein Teiler von t^k, also von der Form $M_A(t) = t^d$ für ein $d \leq k$. Außerdem ist das Minimalpolynom ein Teiler des charakteristischen Polynoms. Insbesondere hat es höchstens Grad n. Somit gilt $A^d = 0$ für ein $d \leq n$ und damit auch $A^n = 0$.

(b) Ist A nilpotent mit $A^k = 0$, so ist Null ihr einziger Eigenwert, denn für $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt aus $Ax = \lambda x$ dann auch $\lambda^k x = A^k x = 0$ und somit $\lambda = 0$.[1]

Besitzt umgekehrt A nur Null als einzigen Eigenwert, so ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch $P_A(t) = (-1)^n t^n$. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt dann $A^n = 0$.

(c) Sei A eine nilpotente Matrix. Dann ist A insbesondere nicht invertierbar. Es gibt also einen Vektor $\mathsf{v}_1 \in \mathbb{K}^n$ mit $A\mathsf{v}_1 = 0$. Wir ergänzen v_1 zu einer Basis mit Transformationsmatrix S_1. Bezüglich dieser Basis hat dann A die Gestalt

$$S_1^{-1} A S_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$$

[1] Dieser Implikation gilt auch über anderen Körpern.

mit einer $1 \times (n-1)$-Matrix B_2 und einer $(n-1) \times (n-1)$-Matrix A_2. Weil A nilpotent ist, muss auch $S_1^{-1}AS_1$ und somti auch A_2 nilpotent sein. Analog zur vorherigen Argumentation gibt es also eine invertierbare Matrix $S_2 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ mit

$$S^{-2}A_2S_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_3 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right)$$

mit einer $1 \times (n-2)$-Matrix B_3 und einer (wiederum nilpotenten) $(n-2) \times (n-2)$-Matrix A_3.

Mit obiger Argumentation, etwas vollständiger Induktion ergibt sich dann wie beim Trigonalisierungsverfahren komplexer Matrizen, dass eine nilpotente Matrix zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix ähnlich ist.