Lineare Algebra 2
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
27.-29. April 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Sei $p(t) := \sum_{k=0} a_k t^k$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Besitzt p eine ganzzahlige Nullstelle $\lambda \in \mathbb{Z}$, so ist λ ein Teiler von a_0, d.h. es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 = \lambda q$.
Hinweis: Betrachten Sie die Polynomdivision durch $(t - \lambda)$.

(b) Bestimmen Sie mittels Polynomdivision für das folgende Polynom alle Nullstellen und ihre Vielfachheiten:

$$p(t) := t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1 .$$

Hinweis: Das Polynom besitzt nur ganzzahlige Nullstellen.

Lösung:

(a) Bei der Polynomdivision von p durch $(t - \lambda)$ entsteht wieder ein Polynom q mit ganzzahligen Koeffizienten, d.h. $p(t) = q(t)\cdot(t-\lambda)$ und $q(t) = \sum_k b_k t^k$ mit $b_k \in \mathbb{Z}$. Für das absolute Glied von p gilt somit $a_0 = b_0 \cdot (-\lambda)$.

(b) $p(t) = (t-1)^2(t+1)^3$.

Aufgabe G2

Sei A eine Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass die geometrische Vielfachheit von λ kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit von λ ist.

Lösung: Bezeichne mit k die geometrische Vielfachheit von λ. Dann gibt es linear unabhängige Vektoren $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k \in \mathbb{K}^n$ mit $A\mathrm{v}_i = \lambda \mathrm{v}_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Wir ergänzen diese Vektoren zu einer Basis $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ von $\mathbb{K}^n$. Bezeichne mit $S := (\mathrm{v}_1|\ldots|\mathrm{v}_n) \in M_n(\mathbb{K})$ die entsprechende Transformationsmatrix. Dann hat die Matrix $S^{-1}AS$ die Gestalt

$$S^{-1}AS = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & A_1 \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A_2 \end{array}\right)$$

mit einer $k \times (n-k)$-Matrix A_1 und einer $(n-k)\times(n-k)$-Matrix A_2. Für das charakteristische Polynom gilt dann

$$\det(A - tE) = \det(S^{-1}AS - tE) = (\lambda - t)^k \cdot \det(A_2 - tE) .$$

Somit hat λ mindestens die algebraische Vielfachheit k.

Aufgabe G3 (Eigenwerte der Ableitung)
Wir bezeichnen mit $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Machen Sie sich klar, dass $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von D ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Exponentialfunktion.

(c) Machen Sie sich klar, dass die Menge aller Polynomfunktionen $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein linearer Teilraum von $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie $D(\mathscr{P}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, d.h. die Abbildung D lässt sich auf den Teilraum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ einschränken.

Finden Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der eingeschränkten Abbildung $D|_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R}), p \mapsto p'$.

Lösung:

(b) Für die Funktion $f_\lambda(x) := e^{\lambda x}$ gilt $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x)$, d.h. f ist ein Eigenvektor von D zum Eigenwert λ.

(c) Dass $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein Vektorraum ist, haben wir bereits im vergangenen Semester gezeigt. Jede Polynomfunktion ist unendlich oft differenzierbar, also ist $\mathscr{P}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ein linearer Teilraum. Die Ableitung einer Polynomfunktion ist wieder eine Polynomfunktion, d.h. $D(\mathscr{P}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Die Ableitung einer konstanten (Polynom-)Funktion verschwindet, d.h. D hat auf $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ den Eigenwert 0. Weiter ist die Ableitung eines Polynoms vom Grad $k > 0$ ein Polynom vom Grad $k-1$. Die Gleichung $p' = \lambda p$ hat somit für kein $\lambda \neq 0$ eine Lösung, d.h. es gibt keine weiteren Eigenwerte.

Hausübung

Aufgabe H8
Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom, die komplexen Eigenwerte mit zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Welche der Matrizen können Sie über $\mathbb{R}$ diagonalisieren, welche über $\mathbb{C}$?

Lösung: Das charakteristische Polynom von A lautet $p(t) = (1-t)(4-t)(6-t)$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 6$ jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Somit muss auch die geometrische Vielfachheit jeweils 1 sein. Die Matrix ist folglich diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ und damit erst recht über $\mathbb{C}$.
Das charakteristische Polynom von B lautet $p(t) = (1-t)^2(2-t)$. Die komplexen Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer (und damit auch geometrischer) Vielfachheit 1. Man sieht sofort, dass die Matrix $B - \lambda_1 E$ Rang 2 hat und somit

1-dimensionalen Kern. Der Eigenwert λ_1 hat also geometrische Vielfachheit 1. Die Matrix ist folglich nicht über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar und damit erst recht nicht über $\mathbb{R}$.
Das charakteristische Polynom vom C lautet $p(t) = -t(t^2+9) = -t(t-3i)(t+3i)$. Die komplexen Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3i$ und $\lambda_3 = -3i$, jeweils mit Vielfachheit 1. Über $\mathbb{C}$ ist die Matrix folglich diagonalisierbar, nicht jedoch über $\mathbb{R}$.

Aufgabe H9 (Fibonacci-Zahlen)
Wir definieren rekursiv eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen durch

$$f_1 := f_2 := 1\,, \qquad\qquad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}\,.$$

Die so konstruierten Zahlen f_n heißen *Fibonacci*-Zahlen.

(a) Berechnen Sie die ersten 8 Fibonacci-Zahlen.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n := (f_n, f_{n+1})^T \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie eine 2×2-Matrix A mit

$$x_{n+1} = A x_n\,.$$

Mit vollständiger Induktion folgt dann $x_n = A^{n-1}x_1$ (ohne Beweis). Insbesondere ist die Fibonacci-Zahl f_n der erste Eintrag des Vektors $A^{n-1}x_1$.

(c) Bestimmen Sie eine explizite Formel für die n-te Fibonacci-Zahl, indem Sie die Potenzen A^n bestimmen.

Lösung:

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

(c) Die Matrix hat die Eigenwerte $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ mit den Eigenvektoren $x_1 = (1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^T$ und $x_2 = (1, \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))^T$. Mit der Transformationsmatrix $S := (x_1|x_2)$ gilt also

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \\ & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}\,.$$

Es folgt

$$A^n = S(S^{-1}AS)^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n & \\ & \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

Da die n-te Fibonacci-Zahl der erste Eintrag von $A^{n-1}x_1$ ist, folgt

$$f_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)\,.$$

Aufgabe H10 (Translation reeller Funktionen)
Sei $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}$ fix. Betrachten Sie den linearen Endomorphismus $S : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, der gegeben ist durch

$$(Sf)(x) := f(x+x_0)\,.$$

(a) Machen Sie sich klar, dass sich S auf den linearen Teilraum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen einschränken lässt (ohne Beweis). Zeigen Sie, dass die konstanten Funktionen die einzigen Eigenvektoren der eingeschränkten Abbildung $S|_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass jede strikt positive, reelle Zahl $\lambda > 0$ ein Eigenwert von S ist.

(c*) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von $S : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist.

Lösung:

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von S und $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein zugeh. Eigenvektor, d.h. $Sp = \lambda p$. Sei n der exakte Grad von p, d.h. $p(x) = \sum_{k=0} a_k x^k$ mit $a_n \neq 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k (x + x_0)^k \, .$$

Vergleicht man die höchsten Koeffizienten beider Seiten, so ergibt sich $a_n = \lambda a_n$, also $\lambda = 1$. Die Abbildung S hat also höchstens den Eigenwert 1.

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass die konstanten Funktionen die einzigen Eigenwerte zum Eigenwert 1 sind. Auch das kann man mit Koeffizientenvergleich zeigen. Alternativ kann man nutzen, dass jedes Polynom vom Grad n durch seine Werte an $n+1$ Stellen eindeutig bestimmt ist. Sei also $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein Polynom mit $Sp = p$. Sei p vom Grad höchstens n. Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht $p(k \cdot x_0) = p(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, insbesondere also $p(0) = p(x_0) = \cdots = p(n \cdot x_0)$, d.h. p nimmt an $n+1$ Stellen den gleich Wert an. Somit muss p die Konstante Funktion $p \equiv p(0)$ sein.

(b) Sei $\lambda > 0$. Betrachte die Funktion $f(x) := \exp(\frac{x}{x_0} \cdot \ln \lambda) = \lambda^{x/x_0}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(Sf)(x) = f(x + x_0) = \lambda^{(x+x_0)/x_0} = \lambda^{x/x_0+1} = \lambda \cdot \lambda^{x/x_0} = \lambda \cdot f(x)$$

d.h. f ist ein Eigenvektor von S zum Eigenwert λ.