Lineare Algebra 2
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

Sommersemester 2010
20.-22. April 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Eigenvektoren sind linear unabhängig.
- ☐ Eigenvektoren zum selben Eigenwert sind linear abhängig.
- ☒ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(b) Betrachten Sie die folgenden Polynome $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{K}[t]$ über dem Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:

$$p_1(t) := t^2 + 1\,, \qquad p_2(t) := (t+1)^2\,, \qquad p_3(t) := t + 1$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Alle Polynome sind gleich.
- ☒ Die Polynome p_1 und p_2 sind gleich.
- ☐ Keine zwei Polynome sind gleich.

(c) Betrachten Sie die folgenden Polynomfunktionen $q_1, q_2, q_3 : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ auf dem Körper $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen:

$$q_1(x) := x^2 + 1\,, \qquad q_2(x) := (x+1)^2\,, \qquad q_3(x) := x + 1$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ☒ Alle Funktionen sind gleich.
- ☒ Die Funktionen q_1 und q_2 sind gleich.
- ☐ Keine zwei Funktionen sind gleich.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda - 1$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\lambda_2 := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Durch Berechnen des Kerns von $A - \lambda_i E$ erhält man als Eigenvektor zu λ_i

$$x_1 = \left(1, -\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)^T, \qquad x_2 = \left(\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), 1\right)^T.$$

Das charakteristische Polynome von B ist $\det(B - \lambda E) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := -1$. Durch Berechnung des jeweiligen Kerns von $B - \lambda_i E$ erhällt man für $\lambda_1 = 1$ den Eigenvektor $x_1 = (1, 3, 2)^T$ und für $\lambda_2 = -1$ z.B. die Eigenvektoren $x_2 = (1, 0, 1)^T$ und $x_3 = (-1, 1, 0)^T$.

Bei der Matrix C sieht man einen Eigenvektor sofort, nämlich $x_0 := (1,1,\dots,1)^T$ zum Eigenwert n. Weiter hat die Matrix C hat Rang 1 und somit $(n-1)$-dimensionalen Kern. Zum Eigenwert 0 gibt es deshalb $n-1$ linear unabhängig Eigenvektoren. Man rechnet leicht nach, dass z.B. die Vektoren

$$x_1 := (1,-1,0,\dots)^T\,, \qquad x_2 := (0,1,-1,0,\dots)^T\,, \qquad \dots\,, \qquad x_{n-1} := (0,\dots,0,1,-1)^T$$

eine solche Familie bilden.

Aufgabe G3

(a) Sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A auch ein Eigenwert der transponierten Matrix A^T ist. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenräume im Allgemeinen nicht übereinstimmen.

(b) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit komplexen Einträgen. Wie hängen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit den Eigenwerten und Eigenvektoren der komplex konjugierten Matrix $\bar{A}$ zusammen?

Aufgabe G4

Sei $\mathbb{K} = \{0,1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ durch ein Polynom 2. Grades realisiert werden kann, d.h. es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$ mit $p(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ mit $f(x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$.

Lösung: Es gibt nur vier Funktionen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Ausprobieren erledigt den Rest.

Hausübung

Aufgabe H5

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4) := \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathscr{C}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass die Matrix von φ die folgende Gestalt hat:

$$[\varphi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Um konkret rechnen zu können stellen wir zuerst die Matrix A von φ bzgl. der Standardbasis auf:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Der Kern wird z.B. von den Vektoren $b_3 := (11,-8,1,0)^T$ und $b_4 := (9,-7,0,1)^T$ aufgespannt. Wir ergänzen b_3 und b_4 durch die Vektoren $b_1 := (1,0,0,0)^T$ und $b_2 := (0,1,0,0)^T$ zu einer Basis.
Das Bild von φ von den Vektoren $c_1 := \varphi(b_1) = (2,3,1)^T$ und $c_2 := \varphi(b_2) = (3,4,1)^T$ aufgespannt. Wir ergänzen c_1 und c_2 durch $c_3 := (0,0,1)^T$ zu einer Basis.
Bzgl. der Basen $\mathscr{B} := (b_1,b_2,b_3,b_4)$ und $\mathscr{C} := (c_1,c_2,c_3)$ hat dann die Matrix $[\varphi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$ die gewünschte Gestalt.

Aufgabe H6

Sei $\mathbb{K} = \{0,1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie alle 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$, die keine Eigenwerte haben.

Lösung: Insgesammt gibt es $2^4 = 16$ Matrizen in $M_2(\mathbb{K})$. Die gesuchten Matrizen dürfen keinen Kern haben, sind somit invertierbar. In $M_2(\mathbb{K})$ sind nur die 6 Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar. Davon haben nur

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

keine Eigenwerte. Bei allen anderen Matrizen findet man leicht durch Raten entsprechende Eigenvektoren.

Aufgabe H7
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}, \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B^T .$$

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist $\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$. Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 := 2$ und $\lambda_2 := -2$. Durch Berechnung des Kerns von $A - \lambda_1 E$ erhält man zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ den Eigenvektor $x_1 := (1, 0, -2)^T$. Analog erhällt man für den Eigenwert $\lambda_2 = -2$ den Eigenvektor $x_2 := (-3, 4, 2)^T$.
Die Matrix A^{-1} hat die Eigenwerte $1/\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $1/\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ mit den jeweiligen Eigenvektoren x_1 bzw. x_2. Weitere Eigenwerte oder Eigenvektor (abgesehen von Vielfachen) gibt es nicht, weil sonst auch $A = (A^{-1})^{-1}$ weitere Eigenwerte bzw. Eigenvektoren haben müsste.
Für die Matrix B gilt $B = A + 3E$. Somit hat B die Eigenwerte $\lambda_1 + 3 = 5$ und $\lambda_2 + 3 = 1$ mit den jeweiligen Eigenvektoren x_1 bzw. x_2. Wegen $A = B - 3E$ gibt es keine weiteren Eigenwerte oder Eigenvektoren.
Die Matrix B^T hat die selben Eigenwerte wie B, also $\mu_1 := 5$ und $\mu_2 := 1$. Durch Berechnung des Kerns von $B^T - \mu_i E$ erhällt man zum Eigenwert μ_1 den Eigenvektor $y_1 := (2, 1, 1)^T$ und zum Eigenwert μ_2 den Eigenvektor $y_2 := (2, -3, 1)^T$.

Aufgabe H8

(a) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ den Eigenwert 1 hat. Sei $\mathsf{v} \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor von φ^2, der kein Eigenvektor von φ ist. Zeigen Sie, dass φ die Eigenwerte 1 und -1 hat.

(b) Sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass -1 ein Eigenwert von $\varphi^2 + \varphi$ ist. Zeigen Sie, dass φ^3 den Eigenwert 1 hat.

Lösung:

(a) Betrachte die Vektoren $w_+ := \mathsf{v} + \varphi(\mathsf{v})$ und $w_- := \mathsf{v} - \varphi(\mathsf{v})$. Weil v kein Eigenvektor von φ ist, sind w_+ und w_- von Null verschieden. Weiter gilt

$$\varphi(w_+) = \varphi(\mathsf{v}) + \varphi^2(\mathsf{v}) = \varphi(\mathsf{v}) + \mathsf{v} = w_+ , \qquad \varphi(w_-) = \varphi(\mathsf{v}) - \varphi^2(\mathsf{v}) = \varphi(\mathsf{v}) - \mathsf{v} = -w_- ,$$

d.h. w_+ bzw. w_- sind Eigenvektoren von φ zum Eigenwert 1 bzw. -1.

(b) Sei $0 \neq \mathsf{v} \in V$ ein Eigenvektor von $\varphi^2 + \varphi$ zum Eigenwerte -1. Dann gilt $\varphi^2(\mathsf{v}) + \varphi(\mathsf{v}) + \mathsf{v} = 0$ und somit

$$0 = \varphi\big(\varphi^2(\mathsf{v}) + \varphi(\mathsf{v}) + \mathsf{v}\big) = \varphi^3(\mathsf{v}) + \varphi^2(\mathsf{v}) + \varphi(\mathsf{v}) = \varphi^3(\mathsf{v}) - \mathsf{v} ,$$

d.h. v ist ein Eigenvektor von φ^3 zum Eigenwert 1.