Lineare Algebra 2
1. Übung
Lösungshinweise

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. A. Kollross
bis 21./22. April 2010

Die Aufgaben im Teil „*Einleitung und Wiederholung*“ empfehlen wir Ihnen zur Wiederholung von Determinanten und zur Klärung der Begriffe aus den ersten Vorlesungen. Die Aufgaben im Teil „*Hausaufgaben*“ können Sie in Ihrer Übungsgruppe am 21. bzw. 22. April 2010 zur Korrektur abgeben.

I Einleitung und Wiederholung

Lösung 1 Minitest

a) ☒ Die Abbildung $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ ist nicht injektiv. ☒ $\det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$.
☒ Die Abbildung $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ ist nicht surjektiv. ☐ $\ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) = \{0\}$.

b) ☐ v ein Eigenwert von φ. ☐ $1/\lambda$ ein Eigenwert von φ.
☐ λ ein Eigenwert von φ. ☒ v ein Eigenvektor von φ.
☒ $-\lambda$ ein Eigenwert von φ. ☒ $-v$ ein Eigenvektor von φ.

c) ☒ $(1,1)^T$, ☐ $(0,0)^T$, ☐ $(1,-1)^T$, ☒ $(1,2)^T$.

Lösung 2

A_1 ist eine Dreieckmatrix, also $\det A_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.
Bei A_2 ist die dritte Zeile die Summe der oberen beiden, also $\det A_2 = 0$.
Bei A_3 gibt es mehrere schnelle Möglichkeiten, die Determinante zu berechnen. Zieht man die z.B. die erste von der letzten Zeile ab, so steht danach in der letzten Zeile nur ein Eintrag. Dann kann man leicht nach der letzten Zeile entwickeln. Ergebnis ist $\det(A_3) = -3$.
Die Matrix A_4 ist eine Blockmatrix. Die Determinante ist somit das Produkt der Determinanten der Blöcke, also $\det(A_4) = (-3) \cdot 2 \cdot (-1) = 6$.

Lösung 3

Die Vektoren der kanonischen Basis sind Eigenvektoren zu den Diagonaleinträgen als Eigenwerten.

Lösung 4

a) Wäre $\lambda = 0$ ein Eigenwert, so wäre A nicht invertierbar. Aus $Av = \lambda v$ folgt dann durch Multiplikation mit $\lambda^{-1}A^{-1}$ von links direkt $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$.

b) Aus $Av = \lambda v$ folgt durch Addition von μv direkt die Behauptung.

c) Die Behauptung ergibt sich mit vollständige Induktion aus $Av = \lambda v$ durch Linksmultiplikation mit A.

II Hausaufgaben

Lösung 1 Berechnung von Determinanten

Wir ziehen zuerst die erste Zeile von allen übrigen Zeilen ab und erhalten so die Matrix

$$A_2 := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \dots & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} .$$

Danach addieren wir die 2. bis n-te Spalte zur ersten Spalte hinzu und erhalten so die obere Dreiecksmatrix

$$A_3 := \begin{pmatrix} \lambda+(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} .$$

Da die gemachten Zeilen- und Spaltenumformungen die Determinante nicht verändern gilt

$$\det(A) = \det(A_2) = \det(A_3) = (\lambda+(n-1)) \cdot (\lambda-1)^{n-1} .$$

Lösung 2

a) Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, sind die Diagonaleinträge die Eigenwerte von A, d.h. Eigenwerte sind $\lambda_1 := 2$, $\lambda_2 := 3$ und $\lambda_3 := 4$. Einen Eigenvektor zu 2 sieht man sofort mit $\mathrm{v}_1 = (1,0,0)^T$. Durch Berechnung des Kerns von $A - \lambda E$ für die anderen beiden Eigenwerte findet man die Eigenvektoren $\mathrm{v}_2 = (-3,-2,1)^T$ zum Eigenwert 3 und $\mathrm{v}_3 = (1,2,0)^T$ zum Eigenwert 4.

b) Die Matrix $S := (\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\mathrm{v}_3)$ ist dann invertierbar und es gilt

$$ASe_i = A\mathrm{v}_i = \lambda_i \mathrm{v}_i = \lambda_i S e_i$$

für jeweils den i-ten Einheitsvektor e_i. Es folgt $S^{-1}ASe_i = \lambda_i e_i$, d.h. $D := S^{-1}AS$ ist die Diagonalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix} .$$

c)

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} , \qquad A^{13} = SD^{13}S^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{13} & 2^{25}-2^{12} & 2^{26}-3^{14}+2^{14} \\ 0 & 2^{26} & 2^{27}-2\cdot 3^{13} \\ 0 & 0 & 3^{13} \end{pmatrix} .$$

Lösung 3

a) Für einen Eigenwert λ mit Eigenvektor $\mathrm{v} \neq 0$ gilt wegen $\varphi^2 = \varphi$

$$\lambda \mathrm{v} = \varphi(\mathrm{v}) = \varphi(\varphi(\mathrm{v})) = \lambda\varphi(\mathrm{v}) = \lambda^2 \mathrm{v} .$$

Es folgt $\lambda = \lambda^2$, also $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

b) Für jeden Vektor $\mathrm{v} \in V$ gilt $\varphi(\varphi(\mathrm{v})) = \varphi(\mathrm{v})$, d.h. $w := \varphi(\mathrm{v})$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Besitzt φ also nur den Eigenwert 0, so muss $\varphi(\mathrm{v}) = 0$ für jeden Vektor $\mathrm{v} \in V$ gelten. Es gibt deshalb nur eine solche Abbildung, die Nullabbildung.

c) Für jeden Vektor $\mathrm{v} \in V$ gilt $\varphi(\mathrm{v} - \varphi(\mathrm{v})) = 0$, d.h. $w := \mathrm{v} - \varphi(\mathrm{v})$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Besitzt φ also nur den Eigenwert 1, so muss $\mathrm{v} - \varphi(\mathrm{v}) = 0$ für jeden Vektor $\mathrm{v} \in V$ gelten. Es gibt deshalb nur eine solche Abbildung, die Identität.