

## Höhere Axiome der Mengenlehre

Wir erinnern uns zuerst an einige Begriffe der Ordnungstheorie.

**Definition 1.** (a) Eine *partielle Ordnung*  $\leq$  auf einer Menge  $X$  ist eine Relation mit folgenden Eigenschaften (für alle  $x, y, z \in X$ ):

(P1)  $x \leq x$  (Reflexivität).

(P2)  $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (Transitivität).

(P3)  $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$  (Antisymmetrie).

Wir nennen  $(X, \leq)$  eine (partiell) geordnete Menge. Gilt  $x \leq y$  für  $x \neq y$ , so schreiben wir  $x < y$ .

(b) Eine partielle Ordnung heißt *total* oder *linear*, wenn

(P4)  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  für alle  $x, y \in X$ .

Eine total geordnete Menge  $(X, \leq)$  heißt *Kette*.

Die geordneten Mengen  $(\mathbb{Q}, \leq)$  und  $(\mathbb{R}, \leq)$  sind Beispiele für Ketten.

(c) Sei  $M$  eine Teilmenge der geordneten Menge  $X$ . Ein Element  $x \in X$  heißt *obere Schranke von  $M$* , wenn  $m \leq x$  für alle  $m \in M$  gilt. Analog definiert man *untere Schranken*.

(d) Ein Element  $s \in M$  heißt *maximal (minimal)*, wenn es kein Element  $t \in M$  mit  $s < t$  ( $t < s$ ) gibt. Man beachte, dass maximale/minimale Elemente i.a. nicht eindeutig sind. Diese Mehrdeutigkeit tritt bei total geordneten Mengen nicht auf. In diesem Fall schreiben wir  $\max M$  bzw.  $\min M$  für die eindeutig bestimmten maximalen bzw. minimalen Elemente (falls sie existieren).

(e) Eine geordnete Menge  $(X, \leq)$  heißt *induktiv geordnet*, wenn jede Kette  $K \subseteq X$  eine obere Schranke hat.

(f) Eine totale Ordnung  $\leq$  auf  $X$  heißt *Wohlordnung*, wenn jede nichtleere Teilmenge  $M \subseteq X$  ein kleinstes Element  $\min M$  hat.

Die Menge  $(\mathbb{N}, \leq)$  ist wohlgeordnet. Die Mengen  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Q}, \leq)$  und  $(\mathbb{R}, \leq)$  sind es nicht. ■

Wir werden die Äquivalenz der folgenden drei Axiome beweisen.

**Axiom 1.** (Auswahlaxiom) Sei  $(A_j)_{j \in J}$  eine Familie nichtleerer Mengen. Dann existiert eine (Auswahl-)Funktion

$$a: J \rightarrow \prod_{j \in J} A_j \quad (\text{disjunkte Vereinigung})$$

mit  $a(j) \in A_j$  für alle  $j \in J$ . ■

**Axiom 2.** (Zornsches Lemma) Jede nichtleere induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element. ■

**Axiom 3.** (Wohlordnungssatz) *Auf jeder Menge existiert eine Wohlordnung.* ■

Wenn man ein bißchen über diese Axiome und ihre Plausibilität nachdenkt, so wird man feststellen, dass das Auswahlaxiom sehr plausibel ist. Der Wohlordnungssatz ist eher unglaublich, und das Zornsche Lemma liegt irgendwo dazwischen.

In enger Beziehung zum Wohlordnungssatz steht das *Prinzip der transfiniten Induktion*: Sei  $(J, \leq)$  eine wohlgeordnete Menge und für jedes  $j \in J$  sei  $p_j$  eine Aussage. Gilt  $p_{j_0}$  für das minimale Element  $j_0 = \min J$  und

$$(TI) \quad \left( (\forall i < j) p_i \right) \Rightarrow p_j$$

für alle  $j \in J$ , so gilt  $p_j$  für alle  $j \in J$ .

Man überlege sich, dass dieses Prinzip sich für den Fall  $(\mathbb{N}, \leq)$  auf das übliche Induktionsprinzip reduziert. Seine Gültigkeit folgt sofort daraus, dass die Menge

$$N := \{j \in J : \neg p_j\}$$

falls sie nicht leer ist, ein Minimum besitzt, im Widerspruch zu (TI).

Wir wenden uns nach diesem kurzen Ausflug wieder unseren Axiomen zu.

**Satz 2.** *Der Wohlordnungssatz folgt aus dem Zornschen Lemma.*

**Beweis.** Sei  $X$  eine Menge. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} := \{(Y, \leq_Y) : Y \subseteq X, \leq_Y \text{ ist Wohlordnung}\}.$$

Da  $(\emptyset, \leq_\emptyset)$  (hier ist  $\leq_\emptyset$  die leere Relation auf  $\emptyset$ ) eine wohlgeordnete Menge ist, ist die Menge  $\mathcal{M}$  nicht leer.

Wir definieren eine Ordnung auf  $\mathcal{M}$ : Es sei  $(Y, \leq_Y) \preceq (Z, \leq_Z)$ , falls  $Y$  ein *Anfangsstück von  $Z$*  ist, d.h.

- (1)  $Y \subseteq Z$ ,
- (2) die Einschränkung der Ordnung  $\leq_Z$  auf  $Y$  stimmt mit  $\leq_Y$  überein, und
- (3) ist  $y \in Y$  und  $z \in Z$  mit  $z \leq_Y y$ , so ist  $z \in Y$ .

**Behauptung:** Die Ordnung  $\preceq$  auf  $\mathcal{M}$  ist induktiv.

Sei dazu  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$  eine Kette. Wir betrachten die Teilmenge  $K := \bigcup_{(Y, \leq_Y) \in \mathcal{K}} Y \subseteq X$ , auf der wir eine Ordnung wie folgt festlegen. Sind  $k_1, k_2 \in K$ , so finden wir ein  $(Y, \leq_Y) \in \mathcal{K}$  mit  $k_1, k_2 \in Y$ , da  $\mathcal{K}$  eine Kette ist. Wir definieren nun  $k_1 \leq_K k_2$ , falls  $k_1 \leq_Y k_2$  gilt. Dass dann auch  $k_1 \leq_Z k_2$  für alle anderen  $(Z, \leq_Z) \in \mathcal{K}$  mit  $k_1, k_2 \in Z$  gilt, folgt aus (2) und der Tatsache, dass  $\mathcal{K}$  eine Kette ist. Da jedes  $(Y, \leq_Y) \in \mathcal{K}$  eine totalgeordnete Menge ist, ist die Ordnung auf  $K$  ebenfalls total.

Wir müssen noch zeigen, dass  $\leq_K$  eine Wohlordnung ist. Sei dazu  $M \subseteq K$  eine nichtleere Teilmenge. Dann existiert ein Element  $y \in M$ , und wir finden ein  $(Y, \leq_Y) \in \mathcal{K}$  mit  $y \in Y$ . Sei  $m := \min_{\leq_Y}(M \cap Y) = \min_{\leq_K}(M \cap Y)$  (existiert, da  $Y$  wohlgeordnet ist). Wir behaupten, dass  $m = \min_{\leq_K}(M)$ . Sei

dazu  $z \in M$ . Dann existiert ein  $(Z, \leq_Z) \in \mathcal{K}$  mit  $z \in Z$ . Gilt  $Z \subseteq Y$ , so ist auch  $z \in Y \cap M$  und daher  $m \leq z$ . Ist dies nicht der Fall, so ist  $Y \subseteq Z$ . Insbesondere ist dann  $m \in Z$ . Gilt  $m \leq z$  nicht, so ist also  $z < m$ , und nach der Definition der Ordnung auf  $\mathcal{M}$  (Teil (3)) folgt  $z \in Y$ , somit  $z \in Y \cap M$  mit  $z < m$ , im Widerspruch zur Definition von  $m$ . Wir haben hiermit  $m = \min M$  gezeigt. Folglich ist  $(K, \leq_K)$  wohlgeordnet und somit eine obere Schranke der Kette  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{M}$ .

Damit ist gezeigt, dass  $(\mathcal{M}, \preceq)$  induktiv geordnet ist. Mit dem Zornschen Lemma finden wir daher ein maximales Element  $(M, \leq_M) \in \mathcal{M}$ . Es bleibt  $M = X$  zu zeigen. Ist dies nicht der Fall, so existiert ein  $x \in X \setminus M$ . Wir setzen  $N := M \cup \{x\}$  und definieren eine Ordnung auf  $N$ , die die Ordnung auf  $M$  fortsetzt, indem wir  $m \leq_N x$  für alle  $m \in M$  definieren ( $x$  wird also „hinten“ an die Menge  $M$  angehängt). Man verifiziert nun leicht, dass  $(N, \leq_N) \in \mathcal{M}$  und  $(M, \leq_M) \preceq (N, \leq_N)$  gilt, ein Widerspruch. Damit ist  $M = X$  gezeigt, d.h. auf  $X$  existiert eine Wohlordnung. ■

**Satz 3.** *Der Wohlordnungssatz impliziert das Auswahlaxiom.*

**Beweis.** Sei  $(A_j)_{j \in J}$  eine Familie nichtleerer Mengen. Nach dem Wohlordnungssatz existiert auf der Menge  $A := \coprod_{j \in J} A_j$  eine Wohlordnung. Wir erhalten eine Auswahlfunktion durch  $a(j) := \min_{\leq_A} A_j$ . ■

Wir schließen nun den Kreis und zeigen, dass das Zornsche Lemma aus dem Auswahlaxiom folgt.

**Satz 4.** *Das Zornsche Lemma folgt aus dem Auswahlaxiom.*

**Beweis.** Sei  $(X, \leq)$  eine nichtleere induktiv geordnete Menge. Wir nehmen an, dass  $X$  kein maximales Element hat.

Für eine Kette  $L \subseteq X$  betrachten wir

$$O_L := \{x \in X : (\forall y \in L) y < x\}.$$

**1. Schritt:**  $O_L \neq \emptyset$  für jede Kette  $L \subseteq X$ .

Ist  $O_L$  leer, so sei  $m_L$  eine obere Schranke von  $L$ . Dann gilt  $m_L \in L$ , denn sonst wäre  $m_L \in O_L$ . Also ist  $m_L$  ein maximales Element von  $L$ . Da es gemäß unserer Annahme keine maximalen Elemente in  $X$  gibt, existiert ein  $x \in X$  mit  $m_L < x$ . Damit ist  $x \in O_L$ , ein Widerspruch.

Das Auswahlaxiom liefert uns nun eine Funktion  $\varphi$ , die jeder Kette  $L \subseteq X$  ein Element  $\varphi(L) \in O_L$  zuordnet. Wir nennen  $L$  eine  $\varphi$ -Kette, falls gilt:

- (1)  $(\forall m \in L) m = \varphi(\{x \in L : x < m\})$ .
- (2)  $L$  ist wohlgeordnet.

Da  $L = \{\varphi(\emptyset)\}$  eine  $\varphi$ -Kette ist, ist die Menge aller  $\varphi$ -Ketten nicht leer.

Eine Teilmenge  $A$  einer Kette  $L$  heißt *Anfangsstück von  $L$* , wenn für  $a \in A$  und  $b \in L$  mit  $b \leq a$  auch  $b \in A$  gilt.

**2. Schritt:** Sind  $L$  und  $K$  zwei  $\varphi$ -Ketten, so ist  $L$  ein Anfangsstück von  $K$  oder umgekehrt.

Sei  $\mathcal{A}$  die Menge der gemeinsamen Anfangsstücke von  $K$  und  $L$ . Dann ist  $A := \bigcup \mathcal{A}$  ebenfalls ein gemeinsames Anfangsstück: Für  $a \in A$ ,  $b \in K$  mit  $b \leq a$  existiert ein  $B \in \mathcal{A}$  mit  $a \in B$ . Damit ist  $b \in B \subseteq A$ . Für  $L$  argumentiert man analog.

Ist  $A = L$  oder  $A = K$ , so sind wir fertig. Sei also  $A \neq L, K$ . Für  $m := \min(L \setminus A)$  und  $n := \min(K \setminus A)$  gilt dann

$$m = \varphi(A) = n.$$

Damit ist  $A \cup \{m\}$  ein gemeinsames Anfangsstück von  $L$  und  $K$ , im Widerspruch zur Definition von  $A$ .

**3. Schritt:** Die Vereinigung  $C$  aller  $\varphi$ -Ketten in  $X$  ist eine  $\varphi$ -Kette.

$C$  ist wohlgeordnet: Nach dem 2. Schritt ist  $C$  total geordnet. Sei  $\emptyset \neq A \subseteq C$  eine Teilmenge. Zu  $a \in A$  existiert dann eine  $\varphi$ -Kette  $K$ , die  $a$  enthält. Sei  $m := \min(A \cap K)$ . Dann ist  $m = \min(A)$ , denn für  $b \in A \setminus K$  existiert eine  $\varphi$ -Kette  $L$ , die  $b$  enthält. Wegen dem 2. Schritt ist  $K$  dann ein Anfangsstück von  $L$ , das  $b$  nicht enthält, und daher  $m \leq b$ .

$C$  ist eine  $\varphi$ -Kette: Sei  $m \in C$ . Dann existiert eine  $\varphi$ -Kette  $K$ , die  $m$  enthält. Sei weiter  $x \in C$  mit  $x < m$ . Dann ist  $x$  in einer  $\varphi$ -Kette  $L$  enthalten. Ist  $L \subseteq K$ , so ist  $x \in K$ , und ist  $K \subseteq L$  ein Anfangsstück, so ist ebenfalls  $x \in K$  wegen  $m \in K$ . Also ist  $x \in K$ , d.h.

$$\{x \in C : x < m\} \subseteq K$$

und somit

$$\varphi(\{x \in C : x < m\}) = \varphi(\{x \in K : x < m\}) = m.$$

Nun ist  $C \cup \{\varphi(C)\}$  ebenfalls eine  $\varphi$ -Kette, im Widerspruch zur Maximalität von  $C$ . Also war unsere Annahme falsch und  $M$  hat ein maximales Element. ■

### Anwendungen

**Satz 5.** (Basisergänzungssatz) *Ist  $V$  ein Vektorraum und  $L \subseteq V$  linear unabhängig, so existiert eine Basis  $B$  von  $V$ , die  $L$  enthält.*

**Beweis.** Man betrachte die Menge  $\mathcal{M}$  aller linear unabhängigen Teilmengen, die  $L$  enthalten, und ordne sie durch Mengeninklusion, d.h.

$$A \leq B \iff A \subseteq B.$$

Man überzeugt sich nun davon, dass diese Menge induktiv geordnet ist und erhält mit dem Zornschen Lemma ein maximales Element  $B$ . Dann ist  $B$  eine Basis von  $V$ . ■

**Folgerung 6.** *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

**Beweis.** Wende Satz 5 auf  $L = \emptyset$  an. ■