



14. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

Hausübung

Diese Hausübungsaufgaben sind Wiederholungsaufgaben und können zur Klausurvorbereitung bearbeitet werden. Sie behandeln wesentliche Themen der Vorlesung, decken aber *nicht* den gesamten klausurrelevanten Stoff ab. Die Aufgaben können nicht abgegeben werden. Lösungen dazu werden ins Netz gestellt.

Aufgabe H42 (Lineare Algebra)

(0 Punkte)

Betrachte die Ebene in dem euklidischen Raum gegeben durch die Punkte $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Gib die Gleichung der Ebene in hessescher Normalform an und berechne den Abstand des Punktes $(1, 1, 1)$ zu dieser Ebene.

Lösung: Wir nennen die drei Punkte in der Ebene \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \vec{x}_3 und den vierten Punkt \vec{y} . Aus dem Vektorprodukt von den Vektoren aus der Ebene (z.B. $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ und $\vec{x}_1 - \vec{x}_3$) erhalten wir zwei Kandidaten für den Normalvektor $\vec{n} = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Nun ergibt sich aus der Ebenengleichung $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ (es soll $d \geq 0$ gelten):

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Also ist der Abstand von y zu der gegebenen Ebene $|d - \vec{n} \cdot \vec{y}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aufgabe H43 (Extremwerte)

(0 Punkte)

Bestimme alle globalen und lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (2x^2 + 1)(y^2 + 1)$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Lösung: *Vorgehensweise:* Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Dann ist die zulässige Menge $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) \leq 0\}$, deren Inneres $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < 0\}$ und ihr Rand $\partial Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. Zunächst sind alle Punkte im Inneren von Z zu bestimmen, die die notwendige Bedingung $D(f)(x, y) = 0$ erfüllen, sowie die Punkte auf dem Rand der zulässigen Menge, für die die Bedingung $D(f)(x, y) = \lambda D(g)(x, y)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Die Punkte mit dem größten bzw. kleinstem Funktionswert sind globale Extrempunkte. Für die Bestimmung der

lokalen Extrema ist jeder der Punkte gesondert zu betrachten, ob er die Bedingung für ein lokales Extremum erfüllt.

Es gilt

$$D(f)(x, y) = (4x(y^2 + 1), 2y(2x^2 + 1)).$$

Da sowohl $y^2 + 1 \neq 0$ als auch $2x^2 + 1 \neq 0$ gilt, erfüllt nur der Punkt $p_0 = (0, 0)$ die Bedingung $D(f)(x, y) = 0$. Außerdem liegt er im Inneren der zulässigen Menge Z .

Weiter gilt

$$D(g)(x, y) = (2x, 2y).$$

Es sind nun Punkte $(x, y) \in \partial Z$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gesucht, sodass

$$D(f)(x, y) = (4x(y^2 + 1), 2y(2x^2 + 1)) = \lambda(2x, 2y) = \lambda D(g)(x, y)$$

gilt.

Ist $x = 0$, dann folgt

$$(0, 2y) = \lambda(0, 2y),$$

das heißt die Bedingung ist für $\lambda = 1$ erfüllt. Da nur Randpunkte interessant sind, ergeben sich die Punkte $p_1 = (0, 1)$ und $p_2 = (0, -1)$.

Ist $y = 0$, dann folgt

$$(4x, 0) = \lambda(2x, 0),$$

das heißt die Bedingung ist für $\lambda = 2$ erfüllt. Da nur Randpunkte interessant sind, ergeben sich die Punkte $p_3 = (1, 0)$ und $p_4 = (-1, 0)$.

Gilt $x, y \neq 0$, dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2(y^2 + 1) &= \lambda \\ 2x^2 + 1 &= \lambda. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 2(y^2 + 1) &= 2x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= y^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{1}{2} + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $x^2 = \frac{3}{4}$ und es ergeben sich die kritischen Punkte $p_5 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $p_6 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $p_7 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ und $p_8 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

Die Funktionswerte der kritischen Punkte sind

$$\begin{aligned} f(p_0) &= 1, \\ f(p_1) &= f(p_2) = 2, \\ f(p_3) &= f(p_4) = 3, \\ f(p_5) &= f(p_6) = f(p_7) = f(p_8) = \frac{25}{8} > 3. \end{aligned}$$

Daher ist p_0 ein globaler Minimalpunkt mit Zielfunktionswert 1 und p_5, p_6, p_7 und p_8 sind globale Maximalpunkte mit Zielfunktionswert $\frac{25}{8}$. Da der Rand der zulässigen Menge ein Kreis ist, die Punkte p_1, \dots, p_8 auf diesem liegen und die Punkte p_5, \dots, p_8 Maximalpunkte sind, sind die Punkte p_1, \dots, p_4 Minimalpunkte, wenn nur der Kreis als zulässige Menge betrachtet wird. Allerdings müssen sie genauer untersucht werden, um zu entscheiden, ob sie auch Minimalpunkte bezüglich der gesamten zulässigen Menge sind. Sei $\delta \in (0, 1)$. Dann gilt $p_i - \delta p_i \in Z$ für alle $i \in \{1, \dots, 4\}$. Weiter gilt

$$f(p_1) - f(p_1 - \delta p_1) = 2 - \underbrace{((1 - \delta)^2 + 1)}_{<1} < 0,$$

$$f(p_2) - f(p_2 - \delta p_2) = 2 - \underbrace{((-1 + \delta)^2 + 1)}_{<1} < 0,$$

$$f(p_3) - f(p_3 - \delta p_3) = 3 - \underbrace{(2(1 - \delta)^2 + 1)}_{<2} < 0,$$

$$f(p_4) - f(p_4 - \delta p_4) = 3 - \underbrace{(2(-1 + \delta)^2 + 1)}_{<2} < 0.$$

Folglich ist keiner der Punkte p_1, \dots, p_4 ein Minimalpunkt. Daher gibt es außer den globalen Extrema keine weiteren lokalen Extrema. Zur Anschauung siehe Abbildung 1.

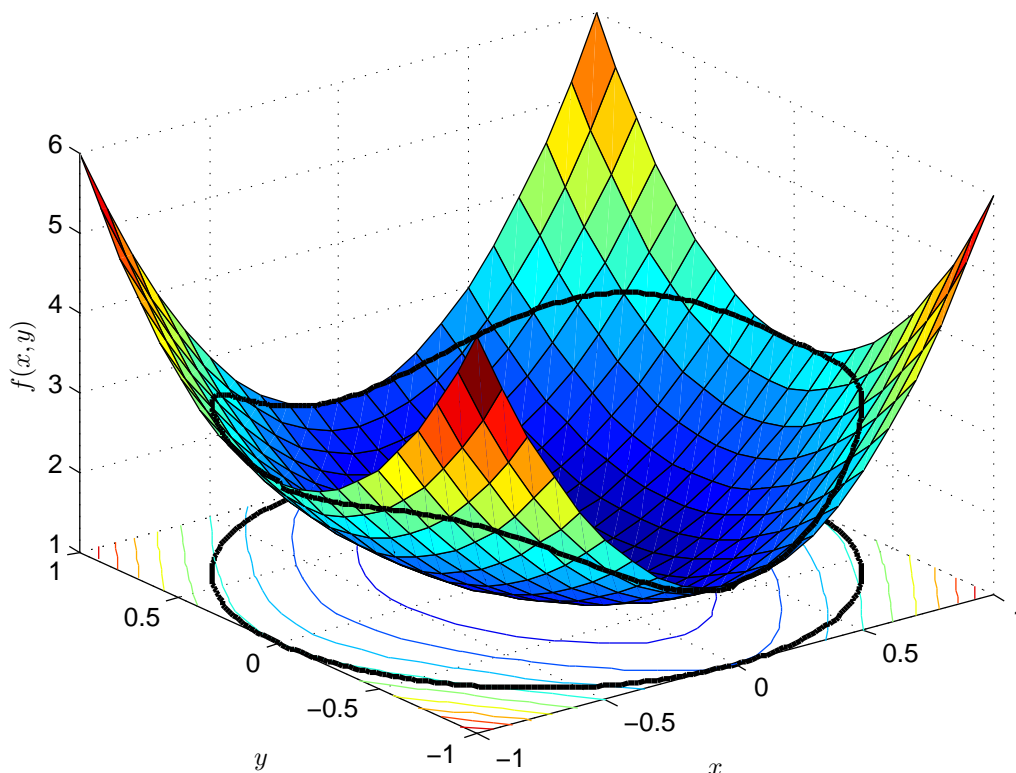


Abbildung 1: Die Funktion f und ihre Höhenlinien. Die dicke schwarze Linie stellt den Rand der zulässigen Menge bzw. dessen Projektion auf den Graphen dar.

Aufgabe H44 (Existenz von Lösungen)

(0 Punkte)

Zeige, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 \quad y(0) = c$$

eine lokale Lösung hat. Für welche Werte der Konstante c gibt es eine globale Lösung?**Lösung:**

- Offensichtlich erfüllt das Anfangswertproblem die Anforderungen in dem Existenz-Satz von Picard-Lindelöf.
- Durch die Trennung der Variablen erhalten wir die Lösung

$$y = -(x - c^{-1})^{-1}$$

und somit für $c \neq 0$ keine globale Lösung, da der Wert von y für $x = c^{-1}$ nicht definiert ist. In dem Sonderfall $c = 0$ hat man die triviale Lösung $y = 0$.

Aufgabe H45 (Lineare Differentialgleichungen, Eigenwerte, Eigenräume)

(0 Punkte)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Zum Bestimmen eines Fundamentalsystems sind zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu berechnen. Das charakteristische Polynom lautet

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)((\lambda - 1)\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

und besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -1$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind die Lösungen des Gleichungssystem $(\lambda_i I - A)v_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Für λ_1 ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für λ_3 ergibt sich

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} v_3 = 0.$$

Die Lösungsmenge ist

$$\left\{ s \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Daher ist

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Nach Aufgabe H44(b) ist

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} y_0 = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} e^{2x} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{2x} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{3} e^{2x} + \frac{1+\sqrt{2}}{3} e^{-x} \\ e^{2x} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{3} e^{2x} + \frac{2+\sqrt{2}}{3} e^{-x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.