Mathematik II für Inf und WInf

13. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 41 Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 7y''' + 13y'' + 12y' + 4y = 0.$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstelle -1.

Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 7\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4 = (\lambda+1)^3(\lambda^2+4), \quad \lambda_{1,2,3} = -1,\ \lambda_{4,5} = \pm 2i.$$

Wir bekommen folgendes Fundamentalsystem der Differentialgleichung:

$$y_1(x) = e^{-x},\ y_2(x) = xe^{-x},\ y_3(x) = x^2e^{-x},\ y_4(x) = \cos(2x),\ y_5(x) = \sin(2x).$$

G 42 Finden Sie alle Lösungen der DGL

$$y^{(4)} - 4y'' = 1 + \cos(2x).$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 4), \quad \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_{3,4} = \pm 2.$$

Die allgemeine Lösung zur homogenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4e^{2x}.$$

Ein Ansatz vom Typ der rechten Seite ist

$$y_n(x) = ax^2 + b\cos(2x) + c\sin(-2x).$$

G 43 Finden Sie alle Lösungen der DGL

$$y^{(5)} + y^{(4)} + y''' + y'' = \cos x + x \cdot e^{-x}.$$

Das charakteristische Polynom der Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Daraus ergibt sich:

$$\lambda^2(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1) = 0, \qquad \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = -1, \qquad \begin{array}{r|l} \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 & \\ \lambda^3 + \lambda^2 & \frac{\lambda+1}{\lambda^2+1}, \\ \hline \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 & \end{array}$$

$\lambda_4 = i,\ \lambda_5 = -i.$

Hieraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = e^{-x},\ y_4(x) = \cos x,\ y_5(x) = \sin x.$$

Da $-i, i$ *Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, bestimmen wir eine partikuläre Lösung* $y^*(x)$ *durch folgenden Ansatz vom Typ der Störungsfunktion*

$$\begin{aligned} y^*(x) &= (a_1 + a_2 x) x e^{-x} + x(b_1 \cos x + b_2 \sin x). \\ (y^*)' &= (a_1 + 2a_2 x) e^{-x} - (a_1 x + a_2 x^2) e^{-x} \\ &\quad + (b_1 \cos x + b_2 \sin x) + x(-b_1 \sin x + b_2 \cos x), \ldots . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt a_1, a_2, b_1, b_2. *Dann ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x + y^*(x).$$