Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Stefan Bundfuss
Andrea Peter

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
6.–10. Juli

# 12. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

## Gruppenübung

**Aufgabe G43** (Fundamentalsystem)

(a) Welche der Funktionenpaare

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix}$$
$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \quad \psi_2(x) = \begin{pmatrix} e^{2x+2} \\ e^{2x+2} \end{pmatrix}$$
$$\rho_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \quad \rho_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bilden ein Fundamentalsystem des linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}?$$

(b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + x \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:**

(a) Die Funktionen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ sind offensichtlich linear unabhängig. Allerdings gilt

$$\varphi_1'(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix},$$
$$\varphi_2'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{-2x} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Daher sind $\varphi_1$, $\varphi_2$ keine Lösungen der Differentialgleichung und bilden somit auch kein Fundamentalsystem.



Die Funktion $\psi_1$ und $\psi_2$ sind Lösungen der Differentialgleichung denn es gilt

$$\psi_1'(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} + e^{2x} \\ e^{2x} + e^{2x} \end{pmatrix}$$
$$\psi_2'(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x+2} \\ 2e^{2x+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x+2} + e^{2x+2} \\ e^{2x+2} + e^{2x+2} \end{pmatrix}.$$

Allerdings gilt

$$\psi_2 = e^2\psi_1.$$

Daher sind $\psi_1$ und $\psi_2$ linear abhängig und bilden kein Fundamentalsystem.
Es gilt

$$\rho_2'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) \\ 1 + (-1) \end{pmatrix}.$$

Folglich sind $\rho_1$ und $\rho_2$ Lösungen der Differentialgleichung. Außerdem sind

$$\rho_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig und damit nach Satz IX.3.3 auch $\rho_1$ und $\rho_2$. Folglich bilden sie ein Fundamentalsystem

(b) Nach Aufgabenteil (a) bilden $\rho_1$ und $\rho_2$ ein Fundamentalsystem. Mit $P = (\rho_1, \rho_2)$ ist dann nach Satz IX.3.6 und Aufgabe H43

$$\begin{aligned}
\psi(x) = P(x)u(x) &= \begin{pmatrix} e^{2x} & 1 \\ e^{2x} & -1 \end{pmatrix} \left( \int_0^x \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}(t)} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} dt + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} e^{2x} & 1 \\ e^{2x} & -1 \end{pmatrix} \left( \int_0^x \frac{1}{2}\begin{pmatrix} te^{-2t} + e^{-2t} \\ t - 1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} e^{2x} & 1 \\ e^{2x} & -1 \end{pmatrix} \left( \frac{1}{2}\left[ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} \\ \frac{t^2}{2} - t \end{pmatrix} \right]_0^x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2x} & 1 \\ e^{2x} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{5}{4} \\ \frac{x^2}{2} - x \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{x^2}{2} - x \\ -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + x \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x^2 - 3x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}e^{2x} \\ -x^2 + x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}e^{2x} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

**Aufgabe G44** (Lineare Differentialgleichungssystem)

Bestimme die Menge aller Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y.$$

**Lösung:** Es ist zunächst ein Fundamentalsystem zu bestimmen. Dazu sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Das charakteristische Polynom lautet

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 4$$

und besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Zugehörige Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Korollar IX.4.3 ist daher

$$\varphi_1(x) := e^{\lambda_1} v_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) := e^{\lambda_2} v_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$ und die Menge aller Lösungen ist

$$L_H = \{\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

**Aufgabe G45** (Lineare Differentialgleichungssysteme)
Bestimme die Menge der reellen Lösungen des Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y.$$

*Tipp:*

- Bilden $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ ein (komplexes) Fundamentalsystem, dann ist die Menge der reellen Lösungen gerade

$$\{(a+bi)\varphi_1 + (c+di)\varphi_2 \mid \Im((a+bi)\varphi_1 + (c+di)\varphi_2) = 0,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\},$$

  das heißt alle komplexen Linearkombinationen von $\varphi_1$ und $\varphi_2$, deren Imaginärteil verschwindet.
- Es gilt $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

**Lösung:** Die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sind $\lambda_1 = 1 + 2i$ und $\lambda_2 = 1 - 2i$ mit den Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher bilden

$$\varphi_1(x) := e^{\lambda_1} v_1 = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) := e^{\lambda_2} v_2 = e^{(1-2i)x} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$



12. Übung Mathematik II für Inf, WInf

ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$. Jede möglicherweise komplexwertige Lösung läßt sich schreiben als $(a+bi)\varphi_1 + (c+di)\varphi_2$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Wir suchen nun solche, die nur reelle Werte annehmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
(a+bi)\varphi_1(x) + (c+di)\varphi_2(x) &= (a+bi)e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + (c+di)e^{(1-2i)x} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= e^x \begin{pmatrix} (a+bi)i(\cos(2x) + i\sin(2x)) - (c+di)i(\cos(-2x) + i\sin(-2x)) \\ (a+bi)(\cos(2x) + i\sin(2x)) + (c+di)(\cos(-2x) + i\sin(-2x)) \end{pmatrix} \\
&= e^x \begin{pmatrix} (-a-c)\sin(2x) + (-b+d)\cos(2x) + i(a-c)\cos(2x) + i(-b-d)\sin(2x) \\ (a+c)\cos(2x) + (-b+d)\sin(2x) + i(a-c)\sin(2x) + i(b+d)\cos(2x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Soll der Imaginärteil (für alle $x \in \mathbb{R}$) verschwinden, muss $a - c = 0$ und $b + d = 0$ gelten. Daher ist die Menge der reellwertigen Lösungen

$$\left\{ ae^x \begin{pmatrix} -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + be^x \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Hausübung

**Aufgabe H43** (Lineare Differentialgleichungen)
Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz IX.3.6. Zeige, dass

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) \quad \text{mit} \quad u(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} b(t)\,dt + \Phi(x_0)^{-1} y_0$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

ist.

**Lösung:** Nach Satz IX.3.6 ist $\psi$ eine Lösung der Differentialgleichung. Es ist daher nur noch zu zeigen, dass $\psi$ die Anfangswertbedingung erfüllt. Es gilt

$$\psi(x_0) = \Phi(x_0) \left( \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} \Phi^{-1}(t) b(t)\,dt}_{=0} + \Phi(x_0)^{-1} y_0 \right) = y_0.$$

Folglich ist $\psi$ die Lösung des Anfangswertproblems.

**Aufgabe H44** (Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten)

(a) Betrachte das lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} y$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Gib in Abhängigkeit von $a$, $b$ und $c$ die Menge aller Lösungen des Systems an.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass

$$\psi(x) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n(x-x_0)} \end{pmatrix} S^T y_0$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay, \quad y(x_0) = y_0$$

ist, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A$ sind und $S$ eine Matrix, deren Spalten eine passende Orthonormalbasis bilden, das heißt die $i$-te Spalte ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_i$.

**Lösung:**

(a) Nach Beispiel VII.12.3 sind die Eigenwerte der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b \end{smallmatrix}\right)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + c^2}.$$

Betrachte zunächst den Fall $c = 0$. Dann sind $a$ und $b$ Eigenwerte und $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ zugehörige Eigenvektoren. Nach Korollar IX.4.3 bilden

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{bt} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem und die Menge aller Lösungen lautet

$$L_H = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ e^{bt} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ist $c \neq 0$, sind (nach Beispiel VII.12.3) $\binom{c}{\lambda_i - a}$ $(i = 1, 2)$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_i$. Daher lautet die Menge aller Lösungen

$$L_H = \left\{ \alpha e^{\lambda_1} \begin{pmatrix} c \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2} \begin{pmatrix} c \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A$ und $a_1, \dots, a_n$ zugehörige Eigenvektoren, sodass sie eine Orthonormalbasis bilden (nach Satz VII.12.2 ist dies möglich). Nach Korollar IX.4.3 bilden die Funktionen

$$\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : x \to e^{\lambda_k t} a_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$. Die Matrix $\Phi(x)$ aus Satz IX.3.6 läßt sich dann folgendermaßen schreiben

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} a_1 & \dots & e^{\lambda_n t} a_n \end{pmatrix} = S \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}}_{=:D(x)}$$





Nach Aufgabe H43 ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1} y_0 = SD(x)(SD(x_0))^{-1} y_0 = SD(x)D(x_0)^{-1} S^{-1} y_0 \\ &= S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{-\lambda_n x_0} \end{pmatrix} S^T y_0 \\ &= S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 (x-x_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n (x-x_0)} \end{pmatrix} S^T y_0. \end{aligned}$$

**Aufgabe H45** (Wronski-Determinante)

Betrachte die inhomogene lineare Differentialordnung $n$-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x) \tag{1}$$

und die zugehörige homogene Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0, \tag{2}$$

wobei $a_i : I \to \mathbb{K}$ $(i \in \{0, \dots n-1\})$ und $b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen seien und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Sei $L_H$ die Menge aller Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}$ der homogenen Differentialgleichung (2). Dann ist $L_H$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum.

(b) Sei $L_I$ die Menge aller Lösungen $\psi : I \to \mathbb{K}$ der inhomogenen Differentialgleichung (1). Dann gilt für ein beliebiges $\psi_0 \in L_I$

$$L_I = \psi_0 + L_H.$$

(c) Ein $n$-Tupel $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ von Lösungen der homogenen Differentialgleichung (2) ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein $x \in I$ die *Wronski-Determinante*

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist.

**Lösung:** Die Differentialgleichung (2) ist offensichtlich äquivalent zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= -a_0(x) y - a_1(x) y' - \cdots - a_{n-1} y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Das heißt jede Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}$ entspricht einer Lösung

$$f_\varphi : I \to \mathbb{K}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

und umgekehrt.

(a) Aufgrund der obigen Äquivalenz folgt die Aussage unmittelbar aus Satz IX.3.3.

(b) Mit der obigen Äquivalenz folgt die Aussage aus Satz IX.3.5.

(c) Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$ linear unabhängige Lösungen von (2), dann ist dies äquivalent dazu, dass $f_{\varphi_1}, \dots, f_{\varphi_n}$ linear unabhängig sind. Nach Satz IX.3.3 ist dies äquivalent dazu, dass für ein $x \in I$ die Vektoren $f_{\varphi_1}(x), \dots, f_{\varphi_n}(x)$ linear unabhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$0 \neq \det(f_{\varphi_1}(x), \dots, f_{\varphi_n}(x)) = W(x)$$

gilt.