Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
29.06.-05.07.10

12. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf"

Gruppenübung

Aufgabe G39 (Fundamentalsystem)

- Welche der Funktionenpaare

$$\phi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \phi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix},$$
$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \qquad \psi_2(x) = \begin{pmatrix} e^{2x+2} \\ e^{2x+2} \end{pmatrix},$$
$$\rho_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \qquad \rho_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

bilden ein Fundamentalsystem des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}?$$

- Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + x \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G40 (Eine Anwendung aus der Physik)

Bestimmen Sie, ausgehend von den Überlegungen in Abschnitt IX.2.3, die minimale Geschwindigkeit, die eine Rakete benötigt, um das Schwerefeld der Erde zu verlassen, wenn man auf der Erdoberfläche startet. Anders gesagt: Wie muss man v mindestens wählen, damit x beliebig groß wird?

Benutzen Sie hierfür folgende Daten: $c = \gamma \cdot M$ mit $\gamma = 6,7 \cdot 10^{-23}, M = 6 \cdot 10^{27}, r \approx 6,3 \cdot 10^{3}$.

Lösung: Die zugrundeliegende Differentialgleichung ergibt sich aus dem Gravitationsgesetz:

$$mx''(t) = \frac{-\gamma m M}{x^2}$$

Hier kann m gekürzt werden; das Problem ist also unabhängig von der Masse der Rakete. Wir erhalten folgendes Anfangswertproblem:

$$x''(t) = \frac{-\gamma M}{x^2} \qquad x(0) = x_0\ (> 0) \quad x' = v_0\ (\geq 0)$$

Frage: „Wie muss man v_0 wählen, dass x beliebig groß wird, d.h. die Rakete das Schwerefeld der Erde verlässt?“
Man erhält:

$$x' = \sqrt{2F(x) + v_0^2}$$

wobei

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{-\gamma M}{t^2}\, dt = \frac{\gamma M}{t}\bigg|_{t=x_0}^{t=x} = \gamma M \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$$

Wir erhalten nun das Anfangswertproblem:

$$x' = \sqrt{\underbrace{2\gamma M}_{a}\frac{1}{x} \underbrace{-2\gamma M\frac{1}{x_0} + v_0^2}_{b}} = \sqrt{\frac{a}{x} + b} \qquad x(0) = x_0$$

Für $b \geq 0$ gilt $x' \geq 0$. Die Geschwindigkeit ist also immer nicht-negativ, d.h. die Rakete fällt nicht zurück.
Es gilt $b \geq 0$ genau dann, wenn $v_0 \geq \sqrt{\frac{2\gamma M}{x_0}}$. Wir werden sehen, dass $\sqrt{\frac{2\gamma M}{x_0}}$ die minimale Geschwindigkeit ist, die die Rakete zum Startzeitpunkt haben muss, um das Schwerefeld der Erde zu verlassen.
Für die realen Bedingungen auf der Erde ($\gamma = 6,7\cdot 10^{-23},\ M = 6\cdot 10^{27},\ x_0 =$ Erdradius $\approx 6,3\cdot 10^3$) ist $v_0 \approx 11,297$km/sec.
Wir betrachten nun den Grenzfall $b = 0$, d.h. die minimale Startgeschwindigkeit v_0, bei der die Geschwindigkeit gerade noch ≥ 0 bleibt. Dabei interessiert uns, ob die Rakete bei dieser Geschwindigkeit auch das Schwerefeld der Erde verlässt.
Mit Trennung der Variablen erhalten wir

$$t + d = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{\eta}}}\, d\eta = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\eta}\, d\eta = \frac{2}{3\sqrt{a}} \cdot \eta^{\frac{3}{2}}\bigg|_{\eta=x_0}^{\eta=x} = \frac{2}{3\sqrt{a}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}}\right)$$

Für $t = 0$ ist $x = x_0$ und somit $d = 0$. Durch Auflösen nach x erhalten wir

$$x(t) = \left(\frac{3\sqrt{a}}{2}t + x_0^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Weil $\frac{3\sqrt{a}}{2} > 0$ wird x beliebig groß, also verlässt die Rakete das Schwerefeld der Erde bei Startgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{2\gamma M}{x_0}}$. Wir zeigen nun, dass dies die minimale solche Geschwindigkeit ist. Angenommen $b < 0$, dann auch

$$\frac{a}{x} + b \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \geq \frac{-b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{-a}{b}\ (\geq 0)$$

Die Rakete kann sich also nicht weiter als $\frac{-a}{b}$ von der Erde entfernen.
Da $\frac{b^2}{a^2} \leq \frac{1}{x^2}$ gilt aufgrund der Differentialgleichung

$$x'' = \frac{-\gamma M}{x^2} \leq \frac{-\gamma M b^2}{a^2} =: d < 0$$

Also gilt für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} x'(t) &= v_0 + \int_0^t x''(t)\, dt \\ &\leq v_0 + \int_0^t \frac{-\gamma M b^2}{a^2}\, du \\ &= v_0 + t \cdot \left(\frac{-\gamma M b^2}{a^2} \right) \\ &= v_0 + t \cdot d \end{aligned}$$

Da $d < 0$ kann $x'(t)$ für genügend großes t beliebig negativ werden; somit fällt die Rakete also auf die Erde zurück. Spätestens für

$$t \geq \tilde{t}_0 = \frac{a^2}{\gamma M b^2} \cdot v_0$$

wird $x'(t)$ negativ, d.h. spätestens zum Zeitpunkt $\tilde{t}_0$ wird der „Point of Return" erreicht. Für t mit $x(t) < \frac{-a}{b}$ gilt $x'(t) > 0$ und somit kann die Geschwindigkeit nicht 0 werden, bevor der Punkt $\frac{-a}{b}$ erreicht ist. Also ist die Funktion

$$x : [0, t_0] \to [x_0, -\frac{a}{b}]$$

streng monoton wachsend.
Für die Umkehrfunktion gilt $t'(x) = \frac{1}{x'(t)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{x}+b}}$. Also ist

$$t_0 = \int_{x_0}^{\frac{-a}{b}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{x} + b}}$$

der präzise Zeitpunkt der Umkehr.

Hausübung

Aufgabe H39 (Lineare Differentialgleichungen) (2 Punkte)
Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz IX.3.6. Zeige, dass

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) \quad \text{mit} \quad u(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} b(t) dt \ + \ \Phi(x_0)^{-1} y_0$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y + b(x), y(x_0) = y_0$$

ist.

Aufgabe H40 (Lineares Differentialgleichungssystem) (2 Punkte)
Bestimme die Menge aller Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe H41 (Lineares Differentialgleichungssystem) (2 Punkte)

Bestimme die Menge der reellen Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Tipp:

- Bilden $\phi_1,\ \phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ ein (komplexes) Fundamentalsystem, dann ist die Menge der reellen Lösungen gerade

$$\{(a+bi)\phi_1 + (c+di)\phi_2 | = ((a+bi)\phi_1 + (c+di)\phi_2) = 0,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\},$$

  das heißt alle komplexen Linearkombinationen von ϕ_1 und ϕ_2, deren Imaginärteil verschwindet.
- Es gilt $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.