Mathematik II für Inf und WInf

11. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 37 Bestimmen Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$y' = \cos(x + y)$$

durch die Substitution $z(x) = x + y(x)$ und anschließender Trennung der Variablen.

Mit der obigen Substitution ist $z'(x) = 1+y'(x)$. *Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert*

$$z'(x) = 1 + \cos(z(x)).$$

Dies lässt sich umformulieren als

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(z)}{g(x)}$$

mit $f(z) = 1 + \cos(z)$ *und* $g(x) = 1$.

Fallunterscheidung:

(i) $f(z) \neq 0$:
Bringt man nun alles, was von z *abhängt auf die eine und alles, was von* x *abhängt auf die andere Seite (= Trennung der Variablen) und integriert beide Seiten, erhält man:*

$$\int \frac{1}{f(z)} dz = \int \frac{1}{g(x)} dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{1 + \cos(z)} dz = \int 1 dx$$

Anwendung des Additionstheorems $(\cos(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}) = \cos^2(\frac{z}{2}) - \sin^2(\frac{z}{2}))$ *liefert*

$$\int \frac{1}{2\cos^2(\frac{z}{2})} dz = \int 1 dx$$

und damit

$$\tan\left(\frac{z(x)}{2}\right) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung lautet nun:

$$y(x) = 2\arctan(x + c) - x.$$

(ii) $f(z) = 0 \Rightarrow z'(x) \equiv 0$:
Dann ist $z(x) = const.$ *und* $\cos(z(x)) = -1$.

$$\Rightarrow z(x) = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

und damit die Lösung

$$y(x) = (2n + 1)\pi - x.$$

G 38 Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' \cdot x + y = 1 + x, \quad x > 0, \quad y(1) = 2.$$

Hinweis: Lösen Sie zuerst die homogene Differenzialgleichung und bestimmen Sie dann die spezielle Lösung des Anfangswertproblems mittels Variation der Konstanten.

Die homogene Differenzialgleichung lautet

$$y'(x) \cdot x + y(x) = 0.$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx$$

und damit

$$\ln|y(x)| = -\ln|x| + \tilde{c} \overset{x \geq 0}{=} \ln\frac{c}{x}$$
$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{c}{x}.$$

Jetzt: Variation der Konstanten zur Bestimmung von c

Ansatz:

$$y(x) = \frac{c(x)}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = \frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2}$$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung liefert

$$\frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2} \cdot x + \frac{c(x)}{x} = 1 + x.$$

Auflösen ergibt

$$c'(x) = 1 + x$$

und damit

$$c(x) = d + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Mit dem Anfangswert $y(1) = 2$ ergibt sich die Lösung

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

G 39 Satz von Picard–Lindelöf

Zeigen Sie für das Anfangswertproblem

$$y' = \sin(x^2y^2)\ , \qquad y(0) = 1\ ,$$

im Rechteck $R = \{(x, y) \ : \ |x - 1| \leq 1, |y| \leq 1\}$ betrachtet, dass dieses Problem genau eine Lösung auf dem Intervall $[0, 2]$ besitzt.

Die Funktion $f(x, y) = \sin(x^2y^2)$ ist stetig nach y differenzierbar mit

$$f_y(x, y) = 2yx^2 \cos(x^2y^2)\ .$$

Weil $|\cos(z)| \leq 1$ für alle z, ist $|f_y(x, y)| \leq 2yx^2 \leq 2 \cdot 1 \cdot 4$ für $(x, y) \in \mathbb{R}$, also ist f_y beschränkt, und deswegen ist f Lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$. Weiter ist

$$M = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}} |\sin(x^2y^2)| \leq 1\ ,$$

und also $\alpha = \min\{1, 1/M\} = 1$. Folglich existiert nach dem Satz von Picard–Lindelöf eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[1 - 1, 1 + 1] = [0, 2]$.

Hausübung

H 37 Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes für die Lösung $y(x)$ sowie der Potenzreihe für die Sinusfunktion die ersten sieben Glieder der Potenzreihe der Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = \sin(x) \cdot y \ , \quad y(0) = 1.$$

Vergleichen Sie das so erhaltene Polynom $P_7(x)$ 7. Grades mit der exakten Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems (Trennung der Variablen!), indem Sie sowohl $y(\frac{1}{2})$ als auch $P_7(\frac{1}{2})$ berechnen.

Einsetzen des Potenzreihenansatzes und Koeffizientenvergleich liefern

$$P_7(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{720}x^6.$$

Die exakte Lösung ist $y(x) = e^{1-\cos x}$. Man erhält

$$P_7(\tfrac{1}{2}) = 1.130230... \quad \textit{und} \quad y(\tfrac{1}{2}) = 1.1302258... \, .$$

H 38 Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Differenzialgleichung

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = 2\sqrt{1+x^2}.$$

Die homogene Lösung lautet

$$\begin{aligned} y_H(x) &= \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\xi}{1+\xi^2} d\xi\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\xi^2\right)\Big|_{\xi=x_0}^{x}\right) \\ &= \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1+x_0^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= c \cdot \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Der Ansatz für die spezielle Lösung (Variation der Konstanten) lautet:

$$\begin{aligned} & y_P(x) = c(x) \cdot \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \quad & y_P'(x) = c'(x) \cdot \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{c(x)}{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot 2x. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert:

$$c'(x) \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + c(x) \cdot x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{xc(x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = 2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

und damit

$$c'(x) = 2.$$

Also ist

$$c(x) = 2x + d, \quad d \in \mathbb{R}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} y(x) &= y_H(x) + y_P(x) \\ &= c \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + (2x+d) \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2x+\tilde{d}) \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

H 39 Existenz und Eindeutigkeit

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2), \quad y(2) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1, 5]$ besitzt.

Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen.

Um zu zeigen, dass das Anfgangswertproblem

$$y' = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2), \qquad y(2) = 1$$

auf dem Intervall $[-1, 5]$ über eine eindeutige Lösung verfügt, werden wir Satz von Picard-Lindelöf verwenden. Aus der Anfangsbedingung erhalten wir zunächst

$$x_0 = 2.$$

Wegen

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] = [2 - \delta, 2 + \delta] = [-1, 5]$$

ergibt sich zudem der Wert

$$\delta = 3.$$

Da die Funktion f mit der Zuordnungsvorschrift

$$f(x, y) = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2)$$

als Komposition stetiger Funktionen auf dem Streifen

$$J \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta,\ y \in \mathbb{R}\} = [-1, 5] \times \mathbb{R}$$

stetig ist und da f wegen

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \left| y_1 \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2) - y_2 \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2) \right| \\ &= \left| e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2) \right| \cdot |y_1 - y_2| \\ &= \underbrace{\left| e^{x^2-25} \right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \sin(x^3+2) \right|}_{\leq 1} \cdot |y_1 - y_2| \\ &\leq 1 \cdot |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in J \times \mathbb{R}$ auf $J \times \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante 1) ist, existiert nach Satz von Picard-Lindelöf genau eine *Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[-1, 5]$.*