Mathematik II für Inf und WInf

10. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 34 Lipschitzbedingung

Entscheiden Sie, ob die folgenden Fuktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lokalen oder globalen Lipschitzbedingungen genügen.

1. $f(x, y) = x^2$
2. $f(x, y) = y^2$
3. $f(x, y) = e^x y$

1. $|f(x, y) - f(x, z)| = |x^2 - x^2| = 0$. Also genügt f einer globalen Lipschitzbedingung.

2. $|f(x, y) - f(x, z)| = |y^2 - z^2| = 2|\xi||y - z|$ mit $\xi \in (y, z)$. Also genügt f einer lokalen aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

3. $|f(x, y) - f(x, z)| = e^x|y - z|$. Also genügt f einer lokalen aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

G 35 Lipschitzstetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig in $x \in D$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset D$ gibt auf der f gleichmäßig stetig ist.
b) Finden Sie eine auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetige Funktion, welche nicht Lipschitzstetig in $x = 0$ ist.

a) Nach Vorraussetzung gibt es eine offene Umgebung $U \subset D$ um x und ein $C \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $y \in U$ $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$ gilt.

Für jedes $\epsilon > 0$ und $\delta := \frac{\epsilon}{2C}$ und für alle $y \in U$ folgt damit aus $\|y - x\| < \delta$ sofort $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Für alle $y_1, y_2 \in U$ folgt dann mit der Dreiecksungleichung

$$\|f(y_1) - f(y_2)\| \leq \|f(y_1) - f(x)\| + \|f(x) - f(y_2)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

b) Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt nicht die Lipschitz Stetigkeit. Besipiel: $D = [0, 1]$ und $f(x) = \sqrt{x}$. Also ist f gleichmäßig stetig. Wir hatten aber schon gesehen, dass f nicht Lipschitz stetig in $x = 0$ ist.

G 36 Eindeutigkeit der Lösungen

Finden Sie ein System von Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen, sodass dieses Problem $(\cos(x), \sin(x))$ als eindeutige Lösung besitzt.

Das gesuchte System lautet:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1, \\ y_1(x) &= 0, \\ y_0'(x) &= -y_1(x), \\ y_1'(x) &= y_0(x). \end{aligned}$$

Nach dem Satz IX.1.3 ist die Lösung von diesem Problem eindeutig.

Hausübung

H 34 Lipschitzbedingung

Entscheide, welche der folgenden Funktionen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer Lipschitzbedingung oder einer lokalen Lipschitzbedingung genügen.

1. $f(x, y) := x|y|$
2. $f(x, y) := \sin(|y|^{-1})$ für $y \neq 0$, $f(x, 0) = 0$ für alle x
3. $f(x, y) := \arctan(x + y)$, $n = 1$

1. *$|f(x, y) - f(x, y')| = |x|\big||y| - |y'|\big| \leq |x||y - y'|$. Also erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung aber keine globale, da $|f(x, y) - f(x, y')| \xrightarrow{x \to \infty} \infty$ für jede festen $y \neq y'$.*
2. *Erfüllt keine Lipschitzbedingung. Ist nicht mal stetig.*
3. *$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(x+y)^2}$ ist beschränkt für alle x und y. Also erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung.*

H 35 Lösungen der DGL

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei im 2. Argument sogar lokal lipschitzstetig.

1. Gibt es durch einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ immer ein Lösung der DGL $y' = f(x, y)$? Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?
2. Es gelte nun zusätzlich $f(-x, y) = -f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß dann jede Lösung y obiger DGL eine gerade Funktion ist.

1. *Ja, dies folgt aus dem Satz von* Picard-Lindelöf.
2. *Ist y eine Lösung der DGL so ist auch $h(x) = y(-x)$ eine Lösung, denn aus der Kettenregel folgt $h'(x) = y'(-x) \cdot (-1) = -y'(-x)$ und somit*

$$h'(x) = -y'(-x) = -f(-x, y(-x)) = -f(-x, h(x)) = f(x, h(x)).$$

Da die Lösung eindeutig ist, folgt $y = h$ bzw. $y(x) = y(-x)$.

H 36 Anfangswertprobleme

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = \frac{y}{x^2} + x$, $y(1) = 0$. Erfüllt die rechte Seite eine Lipschitzbedingung bzgl. y auf $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}$? Begründen Sie, warum das Anfangswertproblem eine für alle $x > 0$ definierte eindeutige Lösung besitzt. Ausgehend von der Anfangsnäherung $y_0(x) = 0$ berechnen Sie dann die Näherungslösungen y_1, y_2, y_3 mit Picarditeration.

1. Schritt:
Lipschitzbedingung erfüllt im Streifen

$$\mathcal{S}_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} < x < n,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Schritt:
Für $\mathcal{S}_m$, $m > n$, stimmt die Lösung $y_m : [\frac{1}{m}, m] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[\frac{1}{n}, n]$ mit y_n überein, weil sonst das Anfangswertproblem im Streifen $\mathcal{S}_n$ zwei Lösungen hätte.

3. Schritt:
Also existiert eine Lösung $y(\infty)$ auf

$$(0,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, n].$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 0 \\
y_1(x) &= \int_1^x (\frac{0}{t^2}) dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\
y_2(0) &= \int_1^x \big(\frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}}{t^2} + t\big) dt = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \\
y_3(x) &= \int_1^x \big(\frac{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2}t^2 - 1}{t^2} + t\big) dt \\
&= \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{t} + \frac{1}{2}t^2 + \text{const}
\end{aligned}$$