Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Stefan Bundfuss
Andrea Peter

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
15.-19.06.09

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

Gruppenübung

Aufgabe G32 (Minitest)

Überlege kurz, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in U$.

- ☐ Wenn f ein lokales Minimum oder Maximum bei x_0 besitzt, dann gilt $D(f)(x_0) = 0$.
- ☐ Wenn $D(f)(x_0) = 0$ gilt, dann besitzt f ein lokales Minimum oder Maximum bei x_0.
- ☐ Wenn $D(f)(x_0) = 0$ und $H(f)(x_0)$ positiv definit gelten, dann besitzt f eine isolierte lokale Extremstelle bei x_0.
- ☐ Wenn $D(f)(x_0) = 0$ und alle Eigenwerte von $H(f)(x_0)$ echt positiv, dann liegt in x_0 ein isoliertes lokales Maximum der Funktion vor.

Lösung: Die erste Aussage ist richtig, da x_0 nach Voraussetzung ein innerer Punkt ist. Läge x_0 am Rand, so könnte er Extremum sein, ohne dass $D(f)(x_0) = 0$ gilt.

Die zweite Aussage ist falsch, $H(f)(x_0)$ könnte indefinit sein.

Die dritte Aussage ist wahr nach Satz VIII.5.4.

Die vierte Aussage ist falsch. Es liegt ein isoliertes lokales Minimum vor.

Aufgabe G33 (Hessematrix)

Untersuche in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^n + y^n,$$

im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $\mathrm{H}(f)(0, 0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Wiederspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

Lösung: Es gilt $\nabla f(x, y) = (nx^{n-1}, ny^{n-1})$. Für $n \geq 2$ liegt also bei $(0, 0)$ eine kritische Stelle vor.

Ist n **gerade**, so gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dass $f(x, y) > 0$. Da für $n \geq 2$ gilt $f(0, 0) = 0$, liegt ein isoliertes Minimum vor.

Ist n **ungerade**, so gilt für alle $\varepsilon > 0$ dass $f(\varepsilon, \varepsilon) > 0$ und $f(-\varepsilon, -\varepsilon) < 0$. Bei $(0, 0)$ liegt also keine lokale Extremstelle vor.

Die Hessematrix in $(0,0)$ ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(f)(x,y)|_{(x,y)=(0,0)} &= \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & n(n-1)x^{n-2} \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{falls } n \geq 3 \\ \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{falls } n = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Hessematrix ist also nur im Fall $n = 2$ positiv definit. In diesem Fall liegt auch ein lokales Minimum vor. In allen anderen Fällen ist sie positiv (und negativ) semidefinit. Es gibt also Fälle, in denen die Hessematrix positiv semidefinit ist, aber kein lokales Minimum vorliegt. Dies widerspricht natürlich nicht den Aussagen der Vorlesung, da die Bedingung war, dass die Hessematrix in dem entsprechenden Punkt positiv definit ist. Ausserdem gibt es Fälle, in denen ein Minimum vorliegt (nämlich n gerade und größer als 2), in denen die Hessematrix nicht positiv definit ist. Das liegt daran, dass die positive Definitheit zwar ein *hinreichendes* Kriterium ist, aber nicht notwendig. Schliesslich zeigt die Aufgabe, dass die Semidefinitheit von $\mathrm{H}(f)$ in einem Punkt keine notwendige Bedingung dafür ist, dass keine lokale Extremstelle vorliegt.

Aufgabe G34 (Implizite Funktion)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := f(t, y(t)),$$

wobei $y(t)$ eine differenzierbare Funktion ist.

(b) Durch die Gleichungen

$$g(t) = f(t, y(t)) = 0 \quad \text{und} \quad y(-1) = 0$$

wird implizit eine differenzierbare Funktion $y(t)$ definiert. Bestimmen Sie $y'(-1)$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$g'(t) = f_x(t, y(t)) \cdot 1 + f_y(t, y(t)) \cdot y'(t),$$

und da

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2x, \quad f_y(x,y) = e^y + 3y^2,$$

ergibt sich:

$$g'(t) = 3t^2 + 2t + (e^{y(t)} + 3y^2(t)) \cdot y'(t).$$

(b) Aus

$$g(t) = f(t, y(t)) = 0$$

ergibt sich nach Aufgabenteil a) mittels differenzieren

$$g'(t) = f_x(t, y(t)) \cdot 1 + f_y(t, y(t)) \cdot y'(t) = 3t^2 + 2t + (e^{y(t)} + 3y^2(t)) \cdot y'(t) = 0.$$

Also gilt:

$$y'(t) = -\frac{f_x(t, y(t))}{f_y(t, y(t))} = -\frac{3t^2 + 2t}{e^{y(t)} + 3y^2(t)}.$$

Für $t = -1$ speziell erhalten wir mit $y(-1) = 0$

$$y'(-1) = -\frac{3-2}{e^0 + 0} = -1.$$

Aufgabe G35 (Lagrangesche Multiplikatoren)

Bestimme das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Platz hat.

Lösung: Ein achsenparalleler Quader mit Mittelpunkt 0 läßt sich eindeutig durch die Angabe einer Ecke (x, y, z) beschreiben. Offensichtlich hat ein achsenparalleler Quader mit maximalem Volumen im Ellipsoid seien Mittelpunkt in 0 und seine Ecken auf dem Rand des Ellipsoids, d.h. für die Ecken (x, y, z) gilt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Wir betrachten die Ecke des Quaders mit $x, y, z \geq 0$. Das Volumen ist $V(x, y, z) = 8xyz$. Die Nebenbedingung ist $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\nabla V(x, y, z) &= (8yz, 8xz, 8xy)^T \\
\nabla f(x, y, z) &= (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}).
\end{aligned}$$

Aus der Langrange'schen Multiplikatorenregel folgt

(i) $8y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0}{a^2}$

(ii) $8x_0z_0 = 2\lambda\frac{y_0}{a^2}$

(iii) $8x_0y_0 = 2\lambda\frac{z_0}{a^2}$

Die drei Gleichung ergeben

$$8x_0y_0z_0 = 2\lambda\frac{x_0^2}{a^2} = 2\lambda\frac{y_0^2}{b^2} = 2\lambda\frac{z_0^2}{c^2},$$

also

$$\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Aus $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ (die NB!) folgt somit $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, also ist die Lösung

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a, \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot b, \quad z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot c$$

Da die Funktion $V(x, y, z)$ stetig ist, nimmt sie auf der kompakten Menge $A := \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ihr Maximum und ihr Minimum an. Ist $x = 0, y = 0$ oder $z = 0$, so ist $V(x, y, z) = 0$. Ist $V(x, y, z)$ das Maximum von V auf A, so gilt $x, y, z > 0$. Die Lagrangesche Multiplikatorenregel greift also und der Punkt (x_0, y_0, z_0) ist das Maximum.

Hausübung

Aufgabe H33 (Fortsetzung von H31)

Zeigen Sie am Beispiel der zwei gegebenen Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - y^2,$$

dass der Gradient in einem Punkt senkrecht auf der Höhenlinie, die durch diesen Punkt verläuft, steht. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie den Gradienten.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion die Tangente der Höhenlinie.

(c) Zeigen Sie, dass der Gradient senkrecht auf der Tangente der Höhenlinie steht.

Lösung:

(a) $\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$\nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$

(b) $D_x(f_1)(x,y) = 2x$
$D_y(f_1)(x,y) = 2y$
$D_y(f_1)(x,y)^{-1} = \frac{1}{2y}$
$D(g_1)(x) = -D_y(f_1)(x,y)^{-1} \cdot D_x(f_1)(x,y) = -2x \cdot \frac{1}{2y} = \frac{-x}{y}$

Die Tangente der Höhenlinie wird somit durch $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x}{y} \end{pmatrix}$ beschrieben.

$D_x(f_2)(x,y) = 2x$
$D_y(f_2)(x,y) = -2y$
$D_y(f_2)(x,y)^{-1} = -\frac{1}{2y}$
$D(g_2)(x) = -D_y(f_2)(x,y)^{-1} \cdot D_x(f_2)(x,y) = -2x \cdot \frac{-1}{2y} = \frac{x}{y}$

Die Tangente der Höhenlinie wird somit durch $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$ beschrieben.

(c) f_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x}{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0$

f_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = 0$

Gradient und Höhenlinie stehen somit senkrecht aufeinander.

Aufgabe H34 (Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher)

In Satz VIII.3.8 wird der Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher formuliert. Dabei wird es notwendig, Integrale über matrixwertigen Funktionen einzuführen. Um erstmal ein Gefühl für die Sache zu bekommen, betrachten wir ein Beispiel.

a) Gegeben sei die Funktion $p :]a,b[\to \mathbb{R}^2$ mit $p(t) := (t^2, t^3)$. Überlege Dir an diesem Beispiel, wo es Probleme mit der direkten Übertragung des Mittelwertsatzes für Funktionen in einer Veränderlichen gibt.

b) Wende auf die Kurve p Satz VIII.3.8 an.

c) Beweise Satz VIII.3.8. Dokumentiere jeweils die Beweisschritte und die Beweisideen.

Lösung:

a) Anschaulich sagt der MWS für Funktionen einer Veränderlichen, daß es im Intervall $]x, x+\xi[$ eine Stelle $x_0 = x + \theta\xi$ gibt (also mit $0 < \theta < 1$), an der die Steigung der Tangenten gleich der Steigung der Sekanten durch $f(x)$ und $f(x+\xi)$ ist. Dies geht für Funktionen in höherdimensionalen Räumen schief. Als Beispiel betrachten wir die in der Aufgabenstellung angegebene Funktion p und zeigen, daß es kein passendes $\theta \in]0,1[$ geben kann (obwohl p differenzierbar ist): Wir nehmen $x = 0, \xi = 1$ und finden

$$\begin{aligned} & p(x+\xi) - p(x) = p'(x+\theta\xi) \cdot \xi \\ \iff \quad & (1,1) = (2\theta, 3\theta^2) \end{aligned}$$

Ein solches θ kann es jedoch nicht geben.

b) Die Kurve p ist stetig differenzierbar, also ist Satz VIII.3.8 anwendbar. Nach Satz VIII.3.8 gilt dann:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \int_0^1 D_1 p_1(x + t(y - x))dt \\
&= \int_0^1 2 \cdot (x + t(y - x))dt \\
&= \int_0^1 2x + 2t(y - x)dt \\
&= [2xt + (y - x)t^2]_0^1 \\
&= 2x + (y - x) \\
&= x + y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \int_0^1 D_1 p_2(x + t(y - x))dt \\
&= \int_0^1 3 \cdot (x + t(y - x))^2 dt \\
&= \int_0^1 3x^2 + 6x(y - x)t + 3t^2(y - x)^2 dt \\
&= [3x^2 t + 3x(y - x)t^2 + (y - x)^2 t^3]_0^1 \\
&= 3x^2 + 3x(y - x) + (y - x)^2 \\
&= 3x^2 + 3xy - 3x^2 + y^2 - 2xy + x^2 \\
&= xy + y^2 + x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p(y) - p(x) \overset{!}{=} A(x, y) \cdot (y - x) \\
\iff & \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ y^3 - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ xy + y^2 + x^2 \end{pmatrix} \cdot (y - x) \\
\iff & \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ y^3 - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ xy^2 + y^3 + x^2 y - x^2 y - y^2 x - x^3 \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ y^3 - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ y^3 - x^3 \end{pmatrix} \quad \surd
\end{aligned}$$

c) Der Beweis folgt unmittelbar durch Anwendung von (2)(Siehe S. 144 im Skript, Abschnitt Mittelwertsatz für mehrstellige Funktionen, Folgerung aus Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) auf die Komponenten f_j der Funktion f.

Aufgabe H35 (implizite Funktion)

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

a) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung von $\sqrt[3]{0.5}$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

b) Für welche (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = 0$ kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. für welche (x_0, y_0) gibt es eine geeignete Umgebung von x_0, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

c) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

d) Berechnen Sie $f'(x_0)$, ohne $f(x_0)$ explizit zu bestimmen.

Lösung: (a) $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$:
$g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) = 2\sin(\pi/4)\cos(\pi/4) = 1$. Also ist $g(x, y) = 0$ in (x_0, y_0) lokal nach y auflösbar.

(b) Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $g(x, y) = 0$ für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ lokal nach y auflösbar.

Weiterhin gilt $g_y(x, y) = 2\sin(y)\cos(y) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Also existiert für (x_0, y_0), $y_0 \neq \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ eine Umgebung U von x_0 und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $y_0 = f(x_0)$ und $g(x, f(x)) = 0$, $x \in U$.

(d) Es gilt

$$f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))},$$

also

$$f'(x_0) = -\frac{3x_0^2}{2\cos(y_0)\sin(y_0)}.$$

(c) $f'(x_0) = -3(\sqrt[3]{0.5})^2$.

Aufgabe H36 (Lagrange)

Sei $U > 0$ der vorgegebene Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen $x, y, z \geq 0$, d.h. $x + y + z - U = 0$ und $x, y, z \leq \frac{U}{2}$. Bestimmen Sie, welches dieser Dreiecke mit Umfang U den größten Flächeninhalt hat.
Hinweis: Verwenden Sie hierfür die (hier ohne Beweis angegebene) *Heronsche Formel*:

$$F = \sqrt{\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - y\right)\left(\frac{U}{2} - z\right)}$$

für den Flächeninhalt F eines Dreiecks mit Seiten x, y, z und Umfang U.

Lösung: Es ist günstiger folgendes äquivalente Optimierungsproblem zu lösen: für $c > 0$ bestimme das Maximum von $f(x, y, z) = (c - x)(c - y)(c - z)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = x + y + z - 2c = 0$ und $c \geq x, y, z \geq 0$ (wobei man $c = \frac{U}{2}$ setzt, um das ursprüngliche Problem zu lösen). Die Menge $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0 \text{ und } c \geq x, y, z \geq 0\}$ ist kompakt. Da f stetig ist, nimmt sie ihr Maximum in einem Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in K$ an. Da die Funktion f am Rand von K konstant 0 ist und $f(x_0, y_0, z_0) > 0$, muß die Funktion f in (x_0, y_0, z_0) ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$ haben.
Es ist

$$D(f)(x, y, z) = \big(-(c - y)(c - z), -(c - x)(c - z), (c - x)(c - y)\big)$$

und

$$D(g)(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

und somit ist $D(f)(x,y,z) = \lambda D(g)(x,y,z)$ äquivalent zu

$$(c-y)(c-z) = (c-x)(c-z) = (c-x)(c-y)$$

Diese Bedingung ist für $(x,y,z) \in K$ genau dann erfüllt, wenn $x = y = z = \frac{2c}{3}$. Also ist $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{2c}{3}$.
Also hat ein Dreieck mit Umfang U maximalen Flächeninhalt, wenn alle drei Seiten gleich sind, und dieser Flächeninhalt ist gleich $\sqrt{\frac{U}{2}(\frac{U}{6})^3} = \frac{U^2}{12\sqrt{3}}$.