# Mathematatik II für Inf und WInf

## 8. Übung
### Lösungsvorschlag

**Gruppenübung**

**G 28 (Partiell aber nicht total differenzierbar)**
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$.

Zeige: $f$ ist stetig und partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$, aber die Funktion ist in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar.

*Die Funktion $f(x, y) = \sqrt{|xy|} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$ is als Produkt zweier stetiger Funktionen wieder stetig, also insbesondere im Punkt $(0, 0)$ stetig. Die partiellen Ableitungen im Punkt $(0, 0)$ können nur mit Hlfe der Definition berechnet werden:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

*Beide partiellen Ableitungen sind im Punkt $(0, 0)$ gleich $0$. Wäre $f$ differenzierbar im Punkt $(0, 0)$, dann würde gelten: $D(f)(0, 0) = (0, 0)$, und es müßte für ein $g(h, k)$ mit*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

*die Gleichung*

$$f(h, k) = f(0, 0) + D(f) \cdot (h, k) + g(h, k)$$

*erfüllt sein. Einsetzen ergibt*

$$\sqrt{|xy|} = 0 + 0 + g(h, k),$$

*also $g(h, k) = \sqrt{|hk|}$. Wählt man nun die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, dann gilt sicherlich $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = (0, 0)$, aber*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}{\|(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

*Also kann $f$ im Nullpunkt nicht differenzierbar sein.*

**G 29 (Partielle Differenzierbarkeit)**
Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x, y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Zeige, dass $F$ im Punkt $(0, 0)$ stetig ist.

b) Zeige, dass $F$ überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber gilt $(D_2D_1F)(0, 0) \neq (D_1D_2F)(0, 0)$.

a) *Wir verwenden das $\varepsilon - \delta-$Kriterium der Stetigkeit: Zu zeigen ist also:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall(x, y)).\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies |f(x, y) - 0| < \varepsilon.$$

*Sei* $|\varepsilon > 0$ *Wir suchen nun ein passendes* $\delta$*: Wenn gilt* $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$*, dann folgt mit* $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geq 0$*, also* $x^2+y^2 \geq 2xy$*, das gilt*

$$|xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}| \leq |xy \cdot \frac{x^2-y^2}{2xy}| = \frac{1}{2}|x^2+y^2| < \frac{\delta^2}{2}.$$

*Wir setzen also* $\delta := \sqrt{2\varepsilon}$*. Damit ist* $f$ *stetig in* $(0,0)$*.*

*b) Wir berechnen einfach die ersten partiellen Ableitungen für* $(x,y) \neq (0,0)$ *(über die Produktregel):*

$$\begin{aligned}(D_1F)(x,y) &= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\\ (D_2F)(x,y) &= x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

*Für* $(x,y) \neq (0,0)$ *kann man offensichtlich jeweils in ähnlicher Weise die Ableitung nach* $x$ *bzw.* $y$ *bestimmen. Die Funktion* $F$ *ist also zweimal partiell differenzierbar. Nun bestimmen wir die Ableitungen in* $(0,0)$*: Es gilt*

$$\begin{aligned}(D_2D_1F)(0,0) &= (D_2(D_1F))(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{(D_1F)(0,h)-(D_1F)(0,0)}{h}\\ (D_1D_2F)(0,0) &= (D_1(D_2F))(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{(D_2F)(h,0)-(D_2F)(0,0)}{h}\end{aligned}$$

*Wir bestimmten also zunächst* $(D_1F)(0,0)$ *und* $(D_2F)(0,0)$*:*

$$(D_1F)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(h,0)-F(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

*und ebenso* $(D_2F)(0,0) = 0$*. Zusammen mit den berechneten ersten partiellen Ableitungen von* $f$ *(siehe oben) folgt dann*

$$(D_2D_1F)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{h \cdot \frac{0-h^2}{0+h^2} + 0 - 0}{h} = -1$$

*und*

$$(D_1D_2F)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{h \cdot \frac{h^2-0}{h^2+0} + 0 - 0}{h} = 1.$$

**G 30 (Kettenregel)**

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(xy) \quad \text{und} \quad g(x,y) = e^{x-y}$$

und die Koordinatentransformation

$$\tilde{x}(u,v) = 2u - v \quad \text{und} \quad \tilde{y}(u,v) = 2u + v.$$

Bestimmen Sie für

$$\tilde{f}(u,v) = f(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v)) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}(u,v) = g(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))$$

mit $\tilde{f},\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel.

*Die partiellen Ableitungen von $f$ lauten*

$$f_x(x,y) = -y\sin(xy) \quad \textit{und} \quad f_y(x,y) = -x\sin(xy).$$

*Für die Koordinatentransformation gilt*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_u(u,v) &= 2 \quad \textit{und} \quad \tilde{x}_v(u,v) = -1 \\ \textit{bzw.} \quad \tilde{y}_u(u,v) &= 2 \quad \textit{und} \quad \tilde{y}_v(u,v) = 1. \end{aligned}$$

*Damit ergibt sich für die Funktion $\tilde{f}$*

$$\begin{aligned} \tilde{f}_u(u,v) &= f_x(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{x}_u(u,v) + f_y(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{y}_u(u,v) \\ &= [-(2u+v)\ \sin((2u-v)(2u+v))]\cdot 2 + [-(2u-v)\ \sin((2u-v)(2u+v))]\cdot 2 \\ &= -2(2u+v+2u-v)\ \sin(4u^2-v^2) = -8u\ \sin(4u^2-v^2), \\ \tilde{f}_v(u,v) &= f_x(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{x}_v(u,v) + f_y(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{y}_v(u,v) \\ &= [-(2u+v)\ \sin((2u-v)(2u+v))]\cdot(-1) + [-(2u-v)\ \sin((2u-v)(2u+v))]\cdot 1 \\ &= (2u+v-2u+v)\ \sin(4u^2-v^2) = 2v\ \sin(4u^2-v^2). \end{aligned}$$

*Die partiellen Ableitungen von $g$ lauten*

$$g_x(x,y) = e^{x-y} \quad \textit{und} \quad g_y(x,y) = -e^{x-y}.$$

*Damit ergibt sich für die Funktion $\tilde{g}$*

$$\begin{aligned} \tilde{g}_u(u,v) &= g_x(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{x}_u(u,v) + g_y(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{y}_u(u,v) \\ &= e^{(2u-v)-(2u+v)}\cdot 2 + (-e^{(2u-v)-(2u+v)})\cdot 2 = 0, \\ \tilde{g}_v(u,v) &= g_x(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{x}_v(u,v) + g_y(\tilde{x}(u,v),\tilde{y}(u,v))\ \tilde{y}_v(u,v) \\ &= e^{(2u-v)-(2u+v)}\cdot(-1) + (-e^{(2u-v)-(2u+v)})\cdot 1 = -2e^{-2v}. \end{aligned}$$

## Hausübung

### H 28 (Differenzierbarkeit)

1. Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit
$$f(x,y) = xy^2 + x^3e^{x-2y}.$$
Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von $f$ bis einschließlich 2. Ordnung.
Ist $f$ total differenzierbar?
Warum gilt $f_{xy}(x,y) - f_{yx}(x,y) = 0$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$?
2. Betrachten Sie die Funktion $g(x,y) = \frac{\sin x}{\cos y}$.
Geben Sie zunächst den Definitionsbereich von $g$ an. Bestimmen Sie anschließend alle partiellen Ableitungen von $g$ bis einschließlich 2. Ordnung.

1. *Für $f$ gilt:*

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y^2 + 3x^2e^{x-2y} + x^3e^{x-2y} = y^2 + (x^3+3x^2)e^{x-2y}, \\ f_y(x,y) &= 2xy - 2x^3e^{x-2y}, \\ f_{xx}(x,y) &= (3x^2+6x)e^{x-2y} + (x^3+3x^2)e^{x-2y} = (x^3+6x^2+6x)e^{x-2y}, \\ f_{yy}(x,y) &= 2x + 4x^3e^{x-2y}, \\ f_{xy}(x,y) &= 2y - 2(x^3+3x^2)e^{x-2y} = f_{yx}(x,y). \end{aligned}$$

*Da $f$ partiell nach $x$ und $y$ differenzierbar ist und beide partiellen Ableitungen stetig sind, ist $f$ total differenzierbar (vgl. Satz 1.3, Seite 214).*
*Da die partiellen Ableitungen $f_{xy}$ und $f_{yx}$ stetig sind, gilt $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (vgl. Satz 2.3, Seite 221).*

2. *Da*

$$\cos y = 0 \quad \text{für} \quad y \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\right\}$$

*gilt, ist der Definitionsbereich von $g$*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

*Die partiellen Ableitungen von $g$ lauten:*

$$\begin{aligned}
g_x(x,y) &= \frac{\cos x}{\cos y},\\
g_y(x,y) &= \frac{\sin x \ \sin y}{\cos^2 y},\\
g_{xx}(x,y) &= -\frac{\sin x}{\cos y},\\
g_{yy}(x,y) &= \frac{\sin x \ \cos y \ \cos^2 y - \sin x \ \sin y \ 2\cos y \ (-\sin y)}{\cos^4 y} = \frac{\sin x \ (\cos^2 y + 2\sin^2 y)}{\cos^3 y},\\
g_{xy}(x,y) &= \frac{\cos x \ \sin y}{\cos^2 y} = g_{yx}(x,y).
\end{aligned}$$

**H 29 (Differenzierbarkeit)**

*Vorbemerkung:* Wenn nur $||\cdot||$ da steht, ist im Allgemeinen die euklidische Norm $||\cdot||_2$ gemeint!

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := g(||x||)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Zeige: $f$ ist genau dann im Nullpunkt differenzierbar, wenn $g'(0) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $f$ stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

*Wenn $f$ im Nullpunkt differenzierbar sein soll, dann müssen dort auch die partiellen Ableitungen existieren, d.h.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = (0,0\ldots,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,\ldots,h,\ldots,0) - f(0,\ldots,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(|h|) - g(0)}{h}.$$

*Nun gilt aber $\lim_{h\searrow 0}\frac{g(|h|)-g(0)}{h} = g'(0)$ und $\lim_{h\nearrow 0}\frac{g(|h|)-g(0)}{h} = \lim_{h\searrow 0}\frac{g(|h|)-g(0)}{-h} = -g'(0)$. Also existieren die partiellen Ableitungen von $f$ genau dann, wenn $g'(0) = -g'(0)$, d.h. $g'(0) = 0$ gilt.*

*In diesem Fall sind die Funktionen*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} g'(|x|)\cdot \frac{x_i}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

*stetig, denn für $x \to 0$ folgt mit der Ungleichung*

$$0 < |\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)| = |g'(|x|)| \cdot \frac{|x_i|}{|x|} \le |g'(x)|$$

*und mit $\lim_{x\to 0}|g'(x)| = 0$ daß $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. Also sind die partiellen Ableitungen auch stetig im Nullpunkt.*

**H 30 (Kettenregel)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy - y^3.$$

Die Darstellung dieser Funktion in Polarkoordinaten

$$\tilde{x}(r, \varphi) = r\cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \tilde{y}(r, \varphi) = r\sin(\varphi)$$

lautet

$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(\tilde{x}(r, \varphi), \tilde{y}(r, \varphi))$$

mit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $\tilde{f}$ mittels der Kettenregel.

*Die partiellen Ableitungen von $f$ lauten*

$$f_x(x, y) = -2x + 2y \quad \textit{und} \quad f_y(x, y) = 2x - 3y^2.$$

*Für die Polarkoordinaten gilt*

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_r(r, \varphi) = \cos(\varphi) \quad \textit{und} \quad \tilde{x}_\varphi(r, \varphi) = -r\sin(\varphi) \\ \textit{bzw.} \quad &\tilde{y}_r(r, \varphi) = \sin(\varphi) \quad \textit{und} \quad \tilde{y}_\varphi(r, \varphi) = r\cos(\varphi). \end{aligned}$$

*Damit ergibt sich für die Funktion $\tilde{f}$*

$$\begin{aligned} \tilde{f}_r(r, \varphi) &= f_x(\tilde{x}(r, \varphi), \tilde{y}(r, \varphi))\ \tilde{x}_r(r, \varphi) + f_y(\tilde{x}(r, \varphi), \tilde{y}(r, \varphi))\ \tilde{y}_r(r, \varphi) \\ &= (-2r\cos(\varphi) + 2r\sin(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) + (2r\cos(\varphi) - 3r^2\sin^2(\varphi)) \cdot \sin(\varphi) \\ &= -2r\cos^2(\varphi) + 4r\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 3r^2\sin^3(\varphi), \\ \tilde{f}_\varphi(r, \varphi) &= f_x(\tilde{x}(r, \varphi), \tilde{y}(r, \varphi))\ \tilde{x}_\varphi(r, \varphi) + f_y(\tilde{x}(r, \varphi), \tilde{y}(r, \varphi))\ \tilde{y}_\varphi(r, \varphi) \\ &= (-2r\cos(\varphi) + 2r\sin(\varphi)) \cdot (-r\sin(\varphi)) + (2r\cos(\varphi) - 3r^2\sin^2(\varphi)) \cdot (r\cos(\varphi)) \\ &= 2r^2(\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) - 3r^3\sin^2(\varphi)\cos(\varphi). \end{aligned}$$