Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
27.-31.05.10

7. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

Gruppenübung

Aufgabe G24 (Grundlegende Definitionen)

Betrachten Sie die folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$:

$$M_1 := \mathbb{R}\,, \qquad M_2 := \emptyset\,, \qquad M_3 := [a,b)\,,$$
$$M_4 := \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\,,$$
$$M_5 := \mathbb{S} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}\,,$$
$$M_6 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1, \quad |x-1| < 2\}\,,$$
$$M_7 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 1, \quad (x-1)^2+y^2 < 4\}\,,$$
$$M_8 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \sin x\}\,.$$

(a) Kreuzen Sie diejenigen Eigenschaften an, die für die ensprechende Menge zutreffen.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_7	M_8
offen									
abgeschlossen									
kompakt									

(b) Geben Sie jeweils den Rand, das Innere und die abgeschlossene Hülle.

(c) Geben Sie alle Häufungspunkte der jeweiligen Menge an.

Hinweis: Es ist oft hilfreich sich die Menge durch eine Skizze zu veranschaulichen.

Lösung: $M_1 = \mathbb{R}$ ist offen und abgeschlossen, aber nicht kompakt. Es gilt $\mathbb{R}^\circ = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ und $\partial\mathbb{R} = \emptyset$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $\mathbb{R}$.

$M_2 = \emptyset$ ist offen, abgeschlossen und kompakt. Es gilt $\emptyset^\circ = \overline{\emptyset} = \partial\emptyset = \emptyset$. Die Menge besitzt keinen Häufungspunkt.

$M_3 = [a,b)$ ist weder offen noch abgeschlossen noch kompakt. Es gilt $[a,b)^\circ = (a,b)$, $\overline{[a,b)} = [a,b]$ und $\partial[a,b) = \{a,b\}$. Jeder Punkt $x \in [a,b]$ ist ein Häufungspunkt der Menge.

M_4 ist weder offen noch abgeschlossen noch kompakt. Es gilt $M_4^\circ = \emptyset$ und $\overline{M_4} = \partial M_4 = M_4 \cup \{0\}$. Der einzige Häufungspunkt der Menge ist 0.

$M_5 = \mathbb{S}$ ist abgeschlossen und kompakt, aber nicht offen. Es gilt $\mathbb{S}^\circ = \emptyset$ und $\overline{\mathbb{S}} = \partial\mathbb{S} = \mathbb{S}$. Jeder Punkt $(x,y) \in \mathbb{S}$ ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{S}$.

M_6 ist offen, nicht abgeschlossen und nicht kompakt. Somit gilt $M_6^\circ = M_6$. Weiter gilt

$$\overline{M_6} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \le 1, \quad |x-1| \le 2\}$$

und damit folgt

$$\partial M_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x+y| = 1,\ |x-1| \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x+y| \leq 1,\ |x-1| = 2\}\ .$$

Jeder Punkt der abgeschlossenen Hülle $\overline{M_6}$ ist ein Häufungspunkt von M_6.
M_7 ist weder offen noch abgeschlossen noch kompakt. Es gilt $M_7^\circ = \emptyset$ und

$$\overline{M_7} = \partial M_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}\ .$$

Jeder Punkt der abgeschlossenen Hülle $\overline{M_7}$ ist Häufungspunkt von M_7.
M_8 ist nicht offen, abgeschlossen und nicht kompakt. Es gilt

$$M_8^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \sin x\}$$

und mit $\overline{M_8} = M_8$ folgt

$$\partial M_8 = \{(x,y) \mid 0 = y \leq \sin x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y = \sin x\}\ .$$

Jeder Punkt des Abschlusses ist ein Häufungspunkt von M_8.

Aufgabe G25 (Einheitskugel)

Es sei V ein Vektorraum und $||\cdot||$ eine gegebene Norm. Dann ist $\overline{B_V} = \{x \in V : ||x|| \leq 1\}$ die Einheitskugel in V.

(a) Skizzieren Sie die Einheitskugel bezüglich der Normen $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ und $||\cdot||_\infty$ im $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Einheitskugel abgeschlossen ist.

Lösung:

(a) Auf http://www.mathematik.uni-marburg.de/~stemmler/software/pball/applet.php gibt es ein schönes Java Applet zur Veranschaulichung der Einheitskugel in verschiedenen Normen. Unbedingt anschauen und ausprobieren.
Die Einheitskugel für die Norm $||\cdot||_1$ ist das Quadrat im $\mathbb{R}^2$, welches seine Eckpunkte in den Punkten (1,0), (-1,0), (0,1) und (0,-1) besitzt. In der euklidischen Norm beschreibt die Einheitskugel eine Kreisscheibe um (0,0) mit dem Radius 1. Die Einheitskugel der Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$ im $\mathbb{R}^2$ ist das Quadrat, welches seine Eckpunkte in (1,1), (1,-1), (-1,1) und (-1,-1) hat.
Auch unter http://de.wikipedia.org/wiki/Einheitskugel sind die drei gefragten Bilder zu sehen.

(b) Eine Menge ist abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. Es ist also zu zeigen, dass $\overline{B_X}^C = \{x \in V : ||x|| > 1\}$ offen ist, d.h., dass $\overline{B_V}^C = \mathring{\overline{B_V}}^C = \{x \in \overline{B_V} : \exists \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x) \subseteq \overline{B_V}\}$. Setze $\varepsilon = ||x|| - 1$.

Aufgabe G26 (Normabschätzungen)

(a) Zeigen Sie, dass die in Beispiel VIII.1.3 beschriebenen Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_\infty$ im $\mathbb{R}^n$ die Bedingungen (N1), (N2) und (N3) erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Abschätzungen für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ zwischen diesen Normen gelten:

$$||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_1 \leq n \cdot ||\cdot||_\infty \qquad \text{und} \qquad ||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_2 \leq \sqrt{n} \cdot ||\cdot||_\infty$$

Lösung:

(a) i. $||x||_1$

N1) $||x||_1 = \underbrace{|x_1|}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{|x_n|}_{\geq 0} \geq 0$

$x = 0 \Rightarrow ||x||_1 = 0$: $||\overrightarrow{0}||_1 = |0| + \ldots + |0| = 0$

$||x||_1 = 0 \Rightarrow x = 0$: $|x_1| + \ldots + |x_n| = 0 \Rightarrow |x_i| = 0 \, \forall i \in \{0, \ldots, n\} \Rightarrow x = 0.$

N2) $||\lambda \cdot x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \cdot ||x||_1$

N3) $||x + y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |xi + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = ||x||_1 + ||y||_1$

ii. $|| \cdot ||_\infty$

N1) $||x||_\infty \geq 0$ Klar, da $|x_i| \geq 0$.

$x = 0 \Rightarrow ||x||_\infty = 0$: $\max_{1 \leq i \leq n} |0| = 0.$

$||x||_\infty = 0 \Rightarrow x = 0$: $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0 \Rightarrow x = 0$

N2) $||\lambda \cdot x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda \cdot x_i| = |\lambda| \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |\lambda| \cdot ||x||_\infty$

N3) $||x+y||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i+y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|+|y_i|) \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = ||x||_\infty + ||x||_\infty$

(b) i. $|| \cdot ||_\infty \leq || \cdot ||_1 \leq n \cdot || \cdot ||_\infty$:

1. Teil: $|| \cdot ||_\infty \leq || \cdot ||_1$

$Z.z.: \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$

Sei OBdA $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_j|$ mit $1 \leq j \leq n$. Dann ist

$||x||_1 = |x_j| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\geq 0} \geq |x_j| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = ||x||_\infty.$

2. Teil: $|| \cdot ||_1 \leq n \cdot || \cdot ||_\infty$

Sei OBdA $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_j|$ mit $1 \leq j \leq n$. Dann gilt $|x_j| \geq |x_1|, \ldots, |x_j| \geq |x_n|$.

Somit gilt dann $n \cdot |x_j| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

ii. $|| \cdot ||_\infty \leq || \cdot ||_2 \leq \sqrt{n} \cdot || \cdot ||_\infty$:

1. Teil: $|| \cdot ||_\infty \leq || \cdot ||_2$

Sei OBdA $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_j|$ mit $1 \leq j \leq n$. Dann ist $|x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{x_j^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \underbrace{x_i^2}_{\geq 0}}$

2. Teil: $|| \cdot ||_2 \leq \sqrt{n} \cdot || \cdot ||_\infty$

Sei OBdA $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_j|$ mit $1 \leq j \leq n$. Dann gilt $|x_j| \geq |x_1|, \ldots, |x_j| \geq |x_n|$.

Somit gilt dann $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{x_j^2 \cdot n} = \sqrt{x_j^2} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot |x_j| = \sqrt{n} \cdot ||x||_\infty.$

Aufgabe G27 (Abschluss einer Menge)

Es gibt eine alternative Beschreibung des Abschlusses einer Menge: Der Abschluss $\overline{M}$ einer Menge M ist die Menge aller möglichen Grenzwerte von Folgen mit Elementen in M. Formal bedeutet dies:

$$a \in \overline{M} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in M \; a = \lim_{k \to \infty} x_k$$

Zeigen Sie, dass diese Definition äquivalent zu der Definition der Vorlesung ist.

Lösung: Wir zeigen zunächst die Implikation $\Leftarrow$. Angenommen a sei der Grenzwert einer Folge von Elementen x_k aus M. Ist dabei $a \in M$ so folgt $a \in \overline{M}$ trivial. Es sei nun $a \neq M$. Da nach Definition der Konvergenz für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, so dass $||a - x_k|| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$ und $a \neq x_k \in M$, so gilt auch $a \in \overline{M}$ nach der Definition des Skripts, da $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall \varepsilon > 0 \, \exists y \in M \, ||x - y|| < \varepsilon\}$.
Zum Nachweis der Implikation $\Rightarrow$ betrachten wir ein beliebiges Element $a \in \overline{M}$. Gilt dabei $a \in \mathring{M}$, so erfüllt die konstante Folge $x_k = a$ die Bedingungen des Satzes. Wegen $\overline{M} = \mathring{M} \cup \partial M$ bleibt der Fall $a \in \partial M$ zu untersuchen. Dann ist für alle $\varepsilon > 0$ der Durchschnitt $M \cap U_\varepsilon(a)$ nach Definition von ∂M jeweils nichtleer. Wir können dann eine Folge von Elementen $x_k \in M \cap U_\varepsilon(a)$ wählen, welche offensichtlich gegen a konvergiert.

Hausübung

Aufgabe H25 (Normkonvergenz) (3 Punkte)

Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß eine Folge genau dann bezüglich $||\cdot||$ konvergiert, wenn sie bezüglich $||\cdot||_\infty$ konvergiert.

Lösung: Aus Satz VIII.1.11 wissen wir, daß es zu der gegebenen Norm $||\cdot||$ zwei positive Konstanten c und d gibt mit $c||\cdot||_\infty < ||\cdot|| < d||\cdot||_\infty$.

$\Rightarrow$ Angenommen eine Folge (x_k) im $\mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ bzgl. $||\cdot||$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall k \geq N \; ||a - x_k|| < \varepsilon.$$

Wegen $c||\cdot||_\infty < ||\cdot||$ folgt

$$\forall \delta > 0 \, \exists N \, \forall k \geq N \, ||a - x_k||_\infty < \frac{\delta}{c}. \tag{1}$$

Um zu zeigen, daß

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall k \geq N \; ||a - x_k||_\infty < \varepsilon,$$

wählen wir ein beliebiges ε. Da (1) für alle δ gilt, gilt (1) insbesondere für $\delta = c\varepsilon > 0$ und somit folgt die Konvergenz von (x_k) gegen a bzgl. $||\cdot||_\infty$.

$\Leftarrow$ Angenommen eine Folge konvergiert bzgl. $||\cdot||_\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall k \geq N \, ||a - x_k||_\infty < \varepsilon.$$

Wegen $d||\cdot||_\infty > ||\cdot||$ folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall k \geq N \; ||a - x_k|| < d\varepsilon$$

und somit (wie oben) auch die Konvergenz von (x_k) gegen a bzgl. $||\cdot||$.

Aufgabe H26 (Stetigkeit) (3 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$h(x,y) := \begin{cases} y + x\cos(1/y) & \text{falls } y \neq 0, \\ 0 & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

Lösung:

f: Auf der Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f durch Produkte und Summen stetiger Funktionen gegeben und somit selbst stetig. Wir zeigen, dass f auch im Punkt $(0,0)$ stetig ist. Sei hierzu $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$, die gegen den Punkt $(0,0)$ konvergiert. Dann gilt

$$0 \le |f(x_n, y_n)| = \frac{|x_n y_n^2|}{x_n^4 + y_n^2} \le \frac{|x_n| y_n^2}{y_n^2} = |x_n| \; .$$

Da die rechte Seite der Ungleichung gegen Null konvergiert folgt $\lim_n f(x_n, y_n) = 0 = f(0,0)$.

g: Analog zu f ist die Funktion g auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist g jedoch unstetig. Um dies zu zeigen wählen wir die konkrete Nullfolge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{1}{n^2}$ und $y_n := \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot (\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n^2})^2 + (\frac{1}{n})^4} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \; ,$$

d.h. f ist im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.

h: Analog zu f ist die Funktion h in jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$ stetig. Wir betrachten zuerst den Punkt $(0,0)$ und zeigen, dass h dort stetig ist. Sei hierzu $(x_n, y_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ die gegen den Punkt $(0,0)$ konvergiert. Da der Kosinus durch -1 bzw. 1 nach unten bzw. oben beschränkt ist, gilt

$$y_n - |x_n| \le h(x_n, y_n) \le y_n + |x_n| \; .$$

Weil y_n und x_n reelle Nullfolgen sind, konvergieren die linke und die rechte Seite der Ungleichungskette gegen Null. Somit gilt auch für den mittleren Teil $\lim_n h(x_n, y_n) = 0 = h(0,0)$.

Wir zeigen weiter, dass die Funktion h in jedem anderen Punkt $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ unstetig ist. Hierzu betrachten wir konkret die Folge $(x_n, y_n)_n$ mit $x_n := x$ und $y_n := 1/(2\pi n)$. Diese Folge konvergiert dann gegen den Punkt $(x,0)$, aber es gilt

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\tfrac{1}{2\pi n} + x\cos(2\pi n)\big) = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2\pi n} + x) = x \; .$$

Wegen $\lim_n h(x_n, y_n) = x \neq 0 = h(x,0)$ ist die Funktion h an der Stelle $(x,0)$ unstetig.