Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
25.–29. Mai

6. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Standardskalarprodukt)

Sei $v, e \in \mathbb{R}^2$ und es gelte $\|e\| = 1$. Weiter sei $a := \langle v, e\rangle e$ und $b := v - a$.
Zeige, dass a und b orthogonal sind, und fertige eine Skizze an. Welche geometrische Bedeutung hat das Skalarprodukt $\langle v, e\rangle$?

Lösung: Es gilt

$$\langle a, b\rangle = \langle\langle v, e\rangle e, v - a\rangle = \langle v, e\rangle\langle e, v - \langle v, e\rangle e\rangle = \langle v, e\rangle(\langle e, v\rangle - \underbrace{\langle v, e\rangle}_{=\langle e,v\rangle}\underbrace{\langle e, e\rangle}_{=1}) = 0.$$

Folglich sind a und b orthogonal.

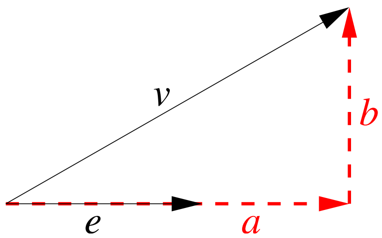

Abbildung 1: Das Standardskalarprodukt

Aus der Skizze (siehe Abbildung 1) ist ersichtlich, dass das Skalarprodukt $\langle v, e\rangle$ gerade der Anteil von v in Richtung e ist. Damit ist auch leicht nachvollziehbar, warum das Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt funktioniert.

Aufgabe G21 (Orthonormalbasen)

Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Stell den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

Lösung: Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \\ \langle v_1, v_3 \rangle = 0 \\ \langle v_2, v_3 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (v_1, v_2, v_3) \text{ bilden ein Orthogonalsystem.}$$

Es gilt ferner:

$$\left.\begin{array}{lcl} \|v_1\| & = & \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \\ \|v_2\| & = & 1 \\ \|v_3\| & = & \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (v_1, v_2, v_3) \text{ bilden ein Orthonormalsystem.}$$

Da jedes Orthonormalsystem linear unabhängig ist bilden v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. Daher gilt

$$\begin{aligned} v &= \langle v_1, v \rangle v_1 + \langle v_2, v \rangle v_2 + \langle v_3, v \rangle v_3 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) v_1 + 2v_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) v_3 \\ &= 2\sqrt{2}v_1 + 2v_2 - \sqrt{2}v_3. \end{aligned}$$

Aufgabe G22 (Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt)

Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Konstruiere eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Zeige, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}^T$ in der lineare Hülle $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt und stelle ihn als Linearkombination der in Teil (a) konstruierten Basis dar.

Lösung:

(a) Mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt ergeben sich die folgenden

Schritte:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T - \left(\tfrac12 + \tfrac12\right)\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}^T \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac14+\frac14+\frac14+\frac14}} \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}^T \\
u_3 &= b_3 - \langle b_3, v_1\rangle v_1 - \langle b_3, v_2\rangle v_2 \\
&= \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T - \left(1+\tfrac12+\tfrac12+1\right)\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T - \left(1-\tfrac12+\tfrac12-1\right)\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T \\
v_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac14+\frac14+\frac14+\frac14}} \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T
\end{aligned}
$$

Folglich ist (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Um nachzuweisen, dass v in $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt, berechnen wir den Anteil von v der nicht in $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt:

$$v - \langle v, v_1\rangle v_1 - \langle v, v_2\rangle v_2 - \langle v, v_3\rangle v_3 = v - 2v_1 + 3v_2 - 4v_3 = 0 \tag{1}$$

Da der Anteil von v außerhalb von $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3)$ verschwindet, liegt v in $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3)$ und aus Gleichung 1 ergibt sich sofort die gesuchte Linearkombination:

$$v = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3.$$

Aufgabe G23 (Definitheit)

Untersuche, ob die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 4\\ 0 & 4 & 9\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

positiv definit, negativ definit, indefinit oder keins von dreien sind.

Tipp: Für Matrizen $M \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gilt, dass die Menge der Eigenwerte von M gerade die Vereinigung der Eigenwerte von A und C ist (siehe Aufgabe H16).

Lösung: Für die Matrix A gilt

$$\begin{aligned}
&\det(a_{11}) = \det(3) = 3 > 0,\\
&\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 15 - 4 = 11 > 0 \text{ und}\\
&\det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -4(12-0) + 9(15-4) = -48 + 99 = 51 > 0.
\end{aligned}$$

Daher ist A nach dem Hurwitzschem Kriterium *positiv definit.*
Die Eigenwerte von B sind $-2-\sqrt{2}$, -2, $-2+\sqrt{2}$ und 0. Da ein Eigenwert Null ist und die übrigen kleiner als Null sind, ist B weder positiv oder negativ definit noch indefinit. Matrizen, deren Eigenwerte alle kleiner oder gleich Null sind, werden *negativ semidefinit* genannt.
Die Matrix C besitzt offensichtlich den Eigenvektor $(1,0,0,0,0,0,0)^T$ zum Eigenwert -1 und den Eigenvektor $(0,0,0,0,0,0,1)^T$ zum Eigenwert 1. Daher ist C *indefinit.*

Hausübung

Aufgabe H22 (Orthonormale Mengen) (2 Punkte)
Sei S eine orthonormale Teilmenge von $\mathbb{C}^n$. Zeige, dass S linear unabhängig ist.

Lösung: Angenommen es gäbe $s_1, \ldots, s_m \in S$, die linear abhängig sind. Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, sodass

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i = 0,$$

wobei nicht alle λ_i gleich Null sind. Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann folgt

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i \mid s_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{\langle s_i \mid s_j \rangle}_{=\begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}} = \lambda_j,$$

was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. Folglich ist S linear unabhängig.

Aufgabe H23 (Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt) (2 Punkte)
Führe das Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt mit den Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aus.
Welches Problem tritt dabei auf und was ist dessen Ursache?
Modifiziere das Orthonormalisierungsverfahren so, dass es auch für die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liefert.

Lösung: Mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt ergeben sich die folgenden Schritte:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}^T \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}^T - \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{9}}}\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}^T \\
u_3 &= b_3 - \langle b_3, v_1\rangle v_1 - \langle b_3, v_2\rangle v_2 \\
&= \begin{pmatrix}-1 & 10 & 0 & 4\end{pmatrix}^T - \left(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{20}{3} + \tfrac{8}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T - \left(-\tfrac{2}{3} - \tfrac{20}{3} + \tfrac{4}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}^T \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Im dritten Schritt erhält man den Nullvektor, womit der Algorithmus nicht fortgesetzt werden kann, da die nachfolgende Normierung nicht möglich ist. Die Ursache des Problems ist, dass (b_1, b_2, b_3) nicht linear unabhängig sind ($b_3 = 2b_1 - 3b_2$), was aber Voraussetzung für das Orthonormalisierungsverfahren ist. Eine mögliche Modifikation des Verfahrens ist der folgende Algorithmus:

for $i = 1$ to n **do**
  $u_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1}\langle b_i, v_j\rangle v_j$
  if $u_i \neq 0$ **then**
    $v_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$
  else
    $v_i = 0$
  end if
end for

Die Menge $\{v_i \mid v_i \neq 0, i \in \{1,\ldots,n\}\}$ bildet dann eine Basis von $\mathrm{lin}(b_1,\ldots,b_n)$.

Aufgabe H24 (Orthogonale Matrizen) (2 Punkte)

(a) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige, dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:
   i. Die Spalten von Q bilden ein Orthonormalsystem.
   ii. Die Matrix Q ist orthogonal.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Zeige, dass die durch A definierte lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$$

Längen und Winkel erhält, das heißt es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \|Ax\| \quad \text{und} \quad \langle x \mid y\rangle = \langle Ax \mid Ay\rangle.$$

Lösung:

(a) Seien $q_1,\ldots,q_n$ die Spalten von Q. Dann gilt

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} q_1^Tq_1 & \cdots & q_1^Tq_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^Tq_1 & \cdots & q_n^Tq_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle q_1 \mid q_1\rangle & \cdots & \langle q_1 \mid q_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle q_n \mid q_1\rangle & \cdots & \langle q_n \mid q_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt sofort die behauptete Äquivalenz.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Nach Definition gilt $\langle x \mid y \rangle = x^T y$. Damit folgt

$$\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax \mid Ax \rangle} = \sqrt{(Ax)^T Ax} = \sqrt{x^T A^T Ax} = \sqrt{x^T A^{-1} Ax} = \sqrt{x^T x} = \|x\|$$

und

$$\langle Ax \mid Ay \rangle = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay = x^T A^{-1} Ay = x^T y = \langle x \mid y \rangle.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass durch orthogonale Matrizen Drehungen und Spiegelungen beschrieben werden.