

# Mathematik II für Inf und WInf

## 5. Übung Lösungsvorschlag

### Gruppenübung

#### G 17 (Lineares Gleichungssystem)

Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}$$

lösbar sind. Bestimmen Sie jeweils die Dimension des Lösungsraums und geben Sie den Lösungsraum an.

- (1) Die Koeffizientenmatrix  $A$  und die erweiterte Matrix  $(A, b)$  des ersten Gleichungssystems sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad (A, b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right).$$

Da die Zeilen Vielfache voneinander sind, gilt  $\text{Rang}(A) = 1$  und  $\text{Rang}(A, b) = 1$ . Also ist das Gleichungssystem lösbar. Die Dimension des Lösungsraums ist  $3 - \text{Rang}(A) = 2$ . Insbesondere ist der Lösungsraum gerade  $\text{Kern}(A)$ . Durch elementare Zeilenumformungen ergibt sich

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{II - 2I} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{III - 3I} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhält man

$$\begin{aligned} x_3 &= t, \\ x_2 &= s, \\ x_1 &= -2s - 3t \end{aligned}$$

für  $s, t \in \mathbb{R}$ . Der Lösungsraum dieses LGS ist also

$$L_1 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (2) Beim zweiten Gleichungssystem sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A, b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Elementare Zeilenumformungen ergeben

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{II - 3I} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{III - 4I} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{III - \frac{1}{2}II} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Damit ist  $\text{Rang}(A) = 3$ . Aus  $\text{Rang}(A) \leq \text{Rang}(A, b) \leq 3$  folgt  $\text{Rang}(A, b) = 3$ . Damit ist das LGS eindeutig lösbar. Um die Lösung zu bestimmen, wenden wir dieselben elementaren Zeilenumformungen an auf die erweiterte Koeffizientenmatrix.

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{II-3I} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{III-4I} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{III-\frac{1}{2}II} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2}x_3 &= -\frac{5}{2} \Rightarrow x_3 = 1, \\ 2x_2 - 5 &= -3 \Rightarrow x_2 = 1, \\ x_1 + 2 &= 1 \Rightarrow x_1 = -1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

### G 18 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Bestimme eine Basis des Kerns von  $A$  und  $\text{Rang}(A)$ .
- Untersuche, ob die linearen Gleichungssysteme  $Ax = b_i$ ,  $i = 1, 2$ , lösbar sind, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimme alle  $b \in \mathbb{R}^3$  für die das LGS  $Ax = b$  eine Lösung besitzt. (Dazu muss man jetzt nicht mehr rechnen!)

- Im  $\text{Kern}(A)$  liegen alle  $x \in \mathbb{R}^3$  mit  $Ax = 0$ , also

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0c + d \end{array} \right\} \cdot (-1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Damit ist  $\text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ . Setze  $x_2 = \lambda, x_3 = \mu$ . Dann ist  $x_1 = -2\lambda + \mu$ :

$$\text{Kern}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Also ist  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  eine Basis von  $\text{Kern}(A)$  und  $\dim(\text{Kern}(A)) = 2$ .

Wegen  $n = 3 = \dim(\text{Kern}(A)) + \text{Rang}(A)$  gilt damit  $\text{Rang}(A) = 1$ .

b) Nach Satz 12.2 ist das LGS  $Ax = b_i$  genau dann lösbar, wenn  $\text{Rang}(A) = 1 = \text{Rang}(A, b_i)$  gilt. Bestimme  $\text{Rang}(A, b_1)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist  $\text{Rang}(A, b_1) = 1$  und das LGS  $Ax = b_1$  lösbar.

Bestimme  $\text{Rang}(A, b_2)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Also ist  $\text{Rang}(A, b_2) = 2$  und das LGS  $Ax = b_2$  nicht lösbar.

c) Das LGS  $Ax = b$  besitzt genau dann eine Lösung, wenn  $b \in \text{Bild}(A)$  gilt. Da  $\dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A) = 1$  ist, und nach  $b(1, 2, -1)^T \in \text{Bild}(A)$  ist, gilt  $\text{Bild}(A) = \{\lambda(1, 2, -1)^T : \lambda \in \mathbb{R}\}$  und  $Ax = b$  ist genau dann lösbar, wenn  $b = \lambda(1, 2, -1)^T$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt.

**G 19** (Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren)

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Phi(x) = Ax$  mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimme die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ & = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ & = (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda-3) = (-2-\lambda)^2(4-\lambda) \end{aligned}$$

Also sind  $\lambda_1 = -2$  und  $\lambda_2 = 4$  Eigenwerte.

Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = -2$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-II), III+(-2II)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Alle Vektoren der Form  $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda \cdot \mu \neq 0$ , sind Eigenvektoren.

Eigenvektoren zu  $\lambda_2 = 4$ :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-III), II+(-III)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setze  $x_2 = \lambda \Rightarrow x_3 = 2\lambda$  und  $x_1 = \lambda$ .

Also sind alle Vektoren der Form  $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , Eigenvektoren.

- b) Bei einer Drehung sind die Vektoren der Drehachse dadurch ausgezeichnet, dass sie durch die Drehung nicht verändert werden, dass also  $Ax = x$  gilt. D.h.  $x$  ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir bestimmen diese Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{4II, III+4I} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} + 2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}})} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(8 - 4\sqrt{3}) & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist  $(1, 0, 1)^T$  ein solcher Eigenvektor und damit ist  $(1, 0, 1)^T$  die Richtung der Drehachse.

Um den Drehwinkel zu bestimmen, bilden wir einen zur Drehachse senkrechten Vektor. z.B.  $x = (0, 1, 0)^T$  mit der Drehung ab. Es gilt

$$Ax = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und der Winkel  $\alpha$  zwischen  $x$  und  $Ax$  ist der Drehwinkel:

$$\cos(\alpha) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\| \cdot \|Ax\|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also gilt  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

## Hausübung

### H 18 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

Für welche Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & (\lambda - 1)x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

- (a) keine,
- (b) genau eine,
- (c) mehrere Lösungen?

Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen!

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS lautet

$$(A_\lambda, b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & -2 & 2 \end{array} \right).$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhält man

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} II - I \\ \rightsquigarrow \\ III - 2I \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda + 2 & 2 \\ 0 & \lambda + 3 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ \begin{array}{l} III - \frac{\lambda+3}{3} II \\ \rightsquigarrow \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda + 2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 5\lambda & 2\lambda \end{array} \right). \end{array}$$

Also sind die Fälle  $\lambda^2 + 5\lambda = 0$  und  $\lambda^2 + 5\lambda \neq 0$  zu betrachten bzw.

$\lambda = 0$ : In diesem Fall ist

$$(\tilde{A}_\lambda, \tilde{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

also ist  $\text{Rang}(A_\lambda) = 2 = \text{Rang}(A_\lambda, b)$  und das LGS ist lösbar.  
Durch Rückwärtseinsetzen erhält man die Lösungen

$$L_0 = \left\{ \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\lambda = -5$ : In diesem Fall ist

$$(\tilde{A}_\lambda, \tilde{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right),$$

also ist  $\text{Rang}(A_\lambda) = 2 \neq \text{Rang}(A_\lambda, b) = 3$  und das LGS ist nicht lösbar.

$\lambda \neq -5, 0$ : Hier gilt  $\text{Rang}(A_\lambda) = 3 = \text{Rang}(A_\lambda, b)$ . Somit ist das LGS eindeutig lösbar und die Lösung ist

$$x_\lambda = \frac{1}{\lambda + 5} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**H 19** Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter  $\alpha$ .

*Hinweis:* Es sind drei verschiedene Fälle in Abhängigkeit vom Wert von  $\alpha$  zu unterscheiden. Bei einem der Fälle ist die Formel  $\alpha^2 - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1)$  (3. binomische Formel) hilfreich.

*Empfehlung:* Benutze den Gaußalgorithmus.

Die erweiterte Systemmatrix lautet

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & \alpha^2 & \alpha \end{array} \right) \xrightarrow{III-I} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & \alpha^2 - 2 & \alpha - 3 \end{array} \right) \xrightarrow{III-II} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha - 1 \end{array} \right).$$

Die Größe der Lösungsmenge hängt davon ab, ob der Ausdruck  $\alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$  gleich Null ist oder nicht. Daher unterscheiden wir drei Fälle:

Für  $\alpha = 1$  gilt

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Folglich kann eine Variable frei gewählt werden. Sei  $x_3 = s$ . Dann folgt  $2x_2 - x_3 = -2$  also  $x_2 = \frac{s-2}{2}$ . Weiter folgt  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$  also  $x_1 = 3 - (s-2) - 2s = 5 - 3s$ . Daher gilt für die Lösungsmenge  $L_{\alpha=1}$ :

$$L_{\alpha=1} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 5 - 3s \\ \frac{s-2}{2} \\ s \end{array} \right) \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

Für  $\alpha = -1$  gilt

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

In der letzten Zeile steht die nicht erfüllbare Gleichung  $0 = -2$ , womit die Lösungsmenge  $L_{\alpha=-1}$  leer ist.

Für  $\alpha \neq \pm 1$  gilt

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha - 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{\alpha-1} III} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 & 1 \end{array} \right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{\alpha + 1}, \\ 2x_2 - x_3 &= -2 & \Rightarrow & x_2 = \frac{1}{2(\alpha + 1)} - 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 & \Rightarrow & x_1 = 5 - \frac{3}{\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Daher gilt für die Lösungsmenge  $L_{\alpha \neq \pm 1}$ :

$$L_{\alpha \neq \pm 1} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 5 - \frac{3}{\alpha + 1} \\ \frac{1}{2(\alpha + 1)} - 1 \\ \frac{1}{\alpha + 1} \end{array} \right) \right\}$$

**H 20** (Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen)

- a) Zeigen Sie, dass sich die charakteristische Gleichung einer
- $2 \times 2$
- Matrix
- $A$
- als

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A) = 0$$

schreiben lässt.

- b) Bestimmen Sie die Lösungen der charakteristischen Gleichung für eine reellwertige Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Für welche  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  besitzt die Matrix  $A$  keine, ein oder zwei reelle Eigenwerte?

- c) Zeigen Sie, dass  $\begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_2 \end{pmatrix}$  Eigenvektoren von  $A$  sind für den Fall, dass  $A$  reelle Eigenwerte hat.
- d) Berechnen Sie für  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  mit  $a + b = c + d$  die Eigenwerte von  $A$  und zeigen Sie, dass sie ganzzahlig sind.

- a) Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_2) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A). \end{aligned}$$

- b) Durch eine quadratische Ergänzung löst man die Gleichung nach
- $\lambda$
- auf und erhält:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4 \det(A)} \right)$$

bzw.

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( (a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc} \right).$$

Damit besitzt  $A$ 

- i) für  $(a - d)^2 + 4bc > 0$  zwei verschiedene reelle Eigenwerte,  
 ii) für  $(a - d)^2 + 4bc = 0$  einen reellen Eigenwert,  
 iii) für  $(a - d)^2 + 4bc < 0$  keinen reellen Eigenwert.
- c) Es ist zu zeigen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -b \\ a - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

was äquivalent ist zu:

$$\begin{pmatrix} -b\lambda_1 \\ ad - cb - d\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\lambda_1 \\ \lambda_1 a - \lambda_1^2 \end{pmatrix}.$$

Die erste Zeile ist bereits ok, nur um die Gleichheit in der zweiten Zeile einzusehen, müssen wir noch ein wenig arbeiten. Es ist einerseits

$$\lambda_1^2 = cb + \frac{1}{2}(a^2 + d^2) + \frac{1}{2}(a + d)\sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4cb}$$

und damit

$$\lambda_1 a - \lambda_1^2 = \frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}d^2 - cb - \frac{1}{2}d\sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4cb}.$$

Andererseits ist

$$ad - cb - d\lambda_1 = ad - cb - \frac{1}{2}d(a + d + \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4cb}),$$

also ist auch die zweite Zeile gleich. Analog rechnet man für  $\lambda_2$ .

d) Mit  $a - d = c - b$  berechnen wir:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \left( (a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (a + d) \pm \sqrt{(c - b)^2 + 4bc} \right) \\ &= \frac{1}{2} ((a + d) \pm (c + b)). \end{aligned}$$

Mit  $d = a + b - c$  ist also  $\lambda_1 = a + b \in \mathbb{Z}$  und  $\lambda_2 = a - c \in \mathbb{Z}$ .

## H 21 (Eigenwerte und Eigenvektoren von transponierten Matrizen)

- a) Sei  $A$  eine quadratische Matrix über  $\mathbb{R}$ . Beweisen oder widerlegen Sie, dass  $A$  und  $A^T$  die gleichen Eigenwerte haben.
- b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass  $A$  und  $A^T$  die gleichen Eigenräume haben.
- a) Sei  $\lambda$  Eigenwert von  $A$ . Dann ist  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Da die Determinante invariant bzgl. Transponieren ist, gilt damit  $\det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)^T = 0$ . Es ist  $(A - \lambda E)^T = A^T - (\lambda E)^T = (A^T - \lambda E)^T = A^T - \lambda E$ . Somit ist  $\det(A^T - \lambda E) = 0$  und  $\lambda$  ist auch Eigenwert von  $A^T$ .
- b) Die Aussage lässt sich folgendes Gegenbeispiel widerlegen. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

dann hat  $A$  die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1 + 2 = 3$  und  $\lambda_2 = 1 - 3 = -2$ . Zu diesen gehören die Eigenräume

$$U_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_{\lambda_2} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es hat

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

zwar auch die Eigenwerte  $\lambda = \frac{1 \pm 5}{2}$ , also  $\lambda_1 = 3$  und  $\lambda_2 = -2$ , aber die Eigenräume sind

$$U_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_{\lambda_2} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$