Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
11.–15. Mai

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Basistransformation)

Die lineare Abbildung ϕ sei durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ gegeben. Wie sieht die Matrix A' aus, die ϕ bezüglich des um $\frac{-\pi}{4}$ gedrehten Koordinaten-Kreuzs darstellt?

Lösung: Wir verfolgen den Abschnitt VII.5 des Skripts. Dann ist in unserem Fall

$$S = T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1} = S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir $A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe G14 (Determinanten)

Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz (Entwicklung nach der ersten Spalte) gilt

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{pmatrix} - 4\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix} + 7\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}\\ &= 5\cdot 9 - 8\cdot 6 - 4(2\cdot 9 - 3\cdot 8) + 7(2\cdot 6 - 5\cdot 3) = 45 - 48 + 24 - 21 = 0.\end{aligned}$$

Die zweite Spalte von B ist das negative der ersten Spalte von B. Daher gilt $\det(B) = 0$.
Die vierte Zeile von C ist eine Nullzeile. Daher gilt $\det(C) = 0$.
Entwickeln nach der jeweils ersten Spalte ergibt

$$\det(D) = 1\cdot\det\begin{pmatrix}7 & 8 & 9 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot 7\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \cdots = 1\cdot 7\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 1 = 42.$$

Aufgabe G15 (Determinantenberechnung)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, das heißt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i > j$ gilt $a_{ij} = 0$.
Zeige, dass die Determinante von A das Produkt der Diagonalelemente ist, das heißt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(b) Bestimme die Determinanten der Matrizen $E_{jk}(\lambda)$, T_{jk} und $D_j(\lambda)$ aus Aufgabe G10, deren Multiplikation elementare Zeilenumformungen bewirken.

(c) Wie ändert sich die Determinante durch das Anwenden einer elementaren Zeilenumformung?

(d) Zeige, dass sich jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mittels elementarer Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix D umformen läßt. Welche Zeilenumformungen werden dazu benötigt? Wie hängen $\det(D)$ und $\det(A)$ zusammen?

(e) Bestimme die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

indem du sie durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix umformst.

Lösung:

(a) Wir zeigen die Aussage mittels vollständige Induktion über n.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$.
Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ für alle oberen Dreiecksmatrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Induktionsschluss: Sei $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ eine obere Dreiecksmatrix. Entwickeln nach der ersten Spalte ergibt

$$\det(A) = a_{11}\cdot\tilde{A}_{11} \overset{\text{IV}}{=} a_{11}\cdot\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii},$$

wobei die Induktionsvoraussetzung angewendet werden kann, da $\tilde{A}_{11}$ eine obere Dreieckmatrix ist.

(b) Die Matrix $E_{jk}(\lambda)$ sieht aus wie die Einheitsmatrix mit dem Unterschied, dass der Eintrag in der j-ten Spalte und k-ten Zeile λ ist, das heißt

$$E_{jk}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der Determinante kann man nach allen Spalten außer der j-ten und der k-ten entwickeln und erhält

$$\det(E_{jk}(\lambda)) = 1^{n-2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1.$$

Die Matrix T_jk ist die Einheitsmatrix, wobei allerdings die j-te und k-te Zeile vertauscht sind, das heißt

$$T_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der Determinante kann man nach allen Spalten außer der j-ten und der k-ten entwickeln und erhält

$$\det(T_{jk}) = 1^{n-2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

Die Matrix $D_j(\lambda)$ sieht aus wie die Einheitsmatrix mit dem Unterschied, dass der j-te Diagonaleintrag gleich λ ist, das heißt

$$D_j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante von Diagonalmatrizen ist das Produkt der Diagonaleinträge. Folglich gilt

$$\det(D_j(\lambda)) = 1^{n-1} \cdot \lambda = \lambda$$

(c) Eine elementare Zeilenumformung entspricht der Multiplikation mit einer der Matrizen $E_{jk}(\lambda)$, T_{jk} und $D_j(\lambda)$. Nach Satz VII.6.4 e) gilt für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{aligned} \det(E_{jk}(\lambda)A) &= 1 \cdot \det(A) = \det(A), \\ \det(T_{jk}A) &= (-1) \cdot \det(A) = -\det(A), \\ \det(D_j(\lambda)A) &= \lambda \det(A). \end{aligned}$$

(d) Mittels elementarer Zeilenumformungen läßt sich beginnend mit der ersten Spalte erreichen, dass alle Elemente unterhalb des Diagonalelements Null sind. Ist das Diagonalelement a_{ii} ungleich Null läßt sich durch das Addieren eines geeigneten Vielfaches der i-ten Zeile auf die darunterliegenden Zeilen erreichen, dass in der i-ten Spalte unterhalb der Diagonalen nur Nullen stehen. Gilt $a_{ii} = 0$ und gibt es ein $a_{ji} \neq 0$ mit $j > i$, dann können die i-te und die j-te Spalte vertauscht werden und man kann wie oben verfahren. Folglich sind um eine Matrix in eine obere Dreiecksmatrix umzuformen nur das Addieren von Vielfachen einer Zeile auf eine andere und das Vertauschen von Zeilen notwendig. Alternativ könnte man im Fall $a_{ii} = 0$ auch die j-te Zeile zur i-ten addieren und dann wie beschrieben weiterverfahren. Dadurch könnte man also auch auf das Vertauschen von Zeilen verzichten.

Das Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert die Determinante nicht, während das Vertauschen zweier Zeilen einen Vorzeichenwechsel zur Folge hat. Bezeichnet t die Anzahl der verwendeten Vertauschungen um die Matrix A in eine obere Dreiecksmatrix D umzuformen, dann gilt

$$\det(A) = (-1)^t \det(D).$$

(e) Zunächst ziehen wir die erste Zeile von allen übrigen ab. Dies ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die dieselbe Determinante wie A besitzt. Das Vertauschen der zweiten und vierten Zeile ergibt dann die obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und folglich gilt

$$\det(A) = (-1)^1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Aufgabe G16 (Matrixinversion)

(a) Berechne die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mittels Zeilenumformungen.

(b) Angenommen es ist nicht bekannt, ob eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar ist. Wie kann während der Matrixinversion durch Zeilenumformungen festgestellt werden, dass A nicht invertierbar ist?

Tipp: Betrachte als Beispiel Matrix A aus Aufgabe G14.

(c) In der Vorlesung wurden zwei Möglichkeiten zur Invertierung von Matrizen vorgestellt (siehe Satz VII.6.6 und Kapitel VII.8). Welche Methode erfordert im Allgemeinen weniger Rechenaufwand?

Lösung:

(a) Nach dem im Kapitel VII.8 beschriebenen Verfahren ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II-I \\ III-3I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-III \\ III \leftrightarrow II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{II-2III \\ I-III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{I-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Folglich ist die Inverse von A die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Ist A nicht invertierbar, dann sind die Zeilen von A linear abhängig. Folglich wird während des Verfahrens eine Nullzeile auftauchen.

(c) Wir betrachten zunächst den Aufwand zum Erzeugen einer obere Dreiecksmatrix. Um in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen Nullen zu erzeugen sind $(n-1)$ Divisionen, $(n-1)^2$ Multiplikationen und $(n-1)^2$ Additionen erforderlich. Um in der zweiten Spalte unterhalb der Diagonalen Nullen zu erzeugen sind $(n-2)$ Divisionen, $(n-2)^2$ Multiplikationen und $(n-2)^2$ Additionen erforderlich und so weiter. Das heißt, es werden

$$D(n) := n-1+n-2+\ldots+1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Divisionen,

$$M(n) := (n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Multiplikationen und

$$A(n) := (n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Additionen benötigt. Multiplikationen.Insgesamt sind daher

$$\begin{aligned} O(n) &:= A+D+M = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{4n^3-6n^2+2n+3n^2-3n}{6} = \frac{4n^3-3n^2-n}{6} \end{aligned}$$

Operationen notwendig. Auf beiden Seiten müssen jeweils unter- und oberhalb der Diagonalen Nullen erzeugt werden und anschließend noch die Diagonale normiert werden, wozu noch $n(n+1)$ Divisionen benötigt werden. Damit ist der Gesamtaufwand zur Inversenberechnung durch Zeilenumformungen

$$4O(n)+n(n+1) = \frac{8n^3-6n^2-2n}{3} + n^2 + n = \frac{8n^3-3n^2+n}{3}.$$

Benutzt man die Formel aus Satz VII.5.6 sind für die Berechnung von $\det(A)$, wenn man diese mittels Zeilenumformungen berechnet, $O(n)+(n-1)$ Operationen notwendig (Umformen zur Dreiecksmatrix und Diagonalelemente multiplizieren). Außerdem müssen die Determinanten von $\tilde{A}_{ji}$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ berechnet werden, wozu $O(n-1)+n-2$ Operationen benötigt werden. Schließlich müssen noch n^2 Divisionen ausgeführt werden, sodass sich ein Gesamtaufwand von

$$\begin{aligned} &O(n)+(n-1)+n^2 O(n-1)+n-2+n^2 \\ &\quad = \frac{4n^3-3n^2-n}{6} + (n-1) + n^2 \cdot \frac{4(n-1)^3-3(n-1)^2-n+1}{6} + n-2+n^2 \\ &\quad = \frac{6n^5-15n^4+21n^3-3n^2+11n-18}{6} \end{aligned}$$

ergibt.

Offensichtlich ist die Inversion durch Zeilenumformungen deutlich weniger aufwändig als die Formel aus Satz VII.6.6 auch wenn die Determinanten effizient berechnet werden.

Hausübung

Aufgabe H14 (Elementare Zeilenumformungen) (2 Punkte)

Zeige, dass sich Vertauschen zweier Zeile einer Matrix durch eine Hintereinanderausführung der in Definition VII.7.1 eingeführten elementaren Zeilenumformungen bewerkstelligen läßt.

Lösung: Bezeichne $a, b \in \mathbb{R}^n$ die zu vertauschenden Zeilen. (Hier sollen a und b als Zeilenvektoren aufgefasst werden.) Dann läßt sich die Vertauschung von a und b folgendermaßen bewerkstelligen:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overset{II-I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a \\ b-a \end{pmatrix} \overset{I+II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} b \\ b-a \end{pmatrix} \overset{II-I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \overset{-II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H15 (Determinanten von 2×2-Matrizen) (2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\det(A) = 0$. Zeige, dass einer der Spaltenvektoren ein skalares Vielfache des anderen Spaltenvektors ist.

Lösung: Aus $\det(A) = 0$ folgt $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.
1. Fall: Sei $a_{22} = 0$. Dann folgt $a_{12}a_{21} = 0$, das heißt entweder gilt $a_{12} = 0$ oder $a_{21} = 0$. Im Fall a_{12} ist die zweite Spalte Null also das Nullfache der ersten Spalte. Im Fall $a_{21} = 0$ ist die zweite Zeile Null und a_{11} offensichtlich ein Vielfaches von a_{12} oder umgekehrt.
2. Fall: Sei $a_{22} \neq 0$. Dann gilt $a_{11} = a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{22}}$. Ist $a_{12} = 0$, dann ist die erste Zeile Null und a_{21} ein Vielfaches von a_{22} oder umgekehrt. Anderenfalls gilt $a_{21} = a_{22} \cdot \frac{a_{11}}{a_{12}}$ und $\frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{a_{11}}{a_{12}}$. Folglich ist die erste Spalte das $\frac{a_{21}}{a_{22}}$-fache der zweiten.

Aufgabe H16 (Determinaten von Blockmatrizen) (2 Punkte)

Die Matrix $M \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ habe die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$.
Zeige, daß die Gleichung

$$\det(M) = \det(A)\det(C)$$

gilt.
Tipp: Betrachte die Transformation von M in eine obere Dreiecksmatrix mittels elementarer Zeilenoperationen.

Lösung: Sei $L_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die obere Dreiecksmatrix, die man aus A mittels elementarer Zeilenoperationen erhält, und p_A die Anzahl der dabei verwendeten Zeilenvertauschungen. Weiter sei $L_C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die obere Dreiecksmatrix, die man aus C mittels elementarer Zeilenoperationen erhält, und p_C die Anzahl der dabei verwendeten Zeilenvertauschungen. Wendet man die zur Erzeugung von L_A verwendeten Zeilenoperationen auf die ersten n Zeilen von M an und die zur Erzeugung von L_C verwendeten auf die letzten m Zeilen, dann erhält man eine obere Dreiecksmatrix $L_M \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$, wobei die ersten n Diagonaleinträge von L_M identisch mit denen von L_A sind und die letzten m mit denen von L_C. Sei d_A das Produkt der Diagonaleinträge von L_A und d_C das Produkt der Diagonaleinträge von L_C. Dann gilt

$$\det(M) = (-1)^{p_A+p_C} d_A d_C = (-1)^{p_A} d_A \cdot (-1)^{p_C} d_C = \det(A)\det(C).$$

Aufgabe H17 (Rechenaufwand der Determinantenberechnung) (0 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix ($n \in \mathbb{N}$). Wir haben zwei Methoden kennengelernt, um die Determinante von A zu berechnen: Entweder kann die rekursive Formel des Laplaceschen Entwicklungssatzes (Satz VII.6.3 im Skript) benutzt werden oder die Matrix wird mittels elementarer Zeilenoperationen in eine obere Dreiecksmatrix umgewandelt und anschließend das Produkt der Diagonaleinträge gebildet (falls eine ungerade Anzahl von Zeilenvertauschungen ausgeführt wurde, muß noch das Vorzeichen umgedreht werden) (siehe Aufgabe G15).
Bestimme jeweils für beide Verfahren die Anzahl der benötigten elementaren Rechenoperationen (Addition, Multiplikation, Division) im schlechtesten Fall. Hierbei kann die Multiplikation mit $(-1)^{i+j}$ im Laplaceschen Entwicklungssatz vernachlässigt werden.
Berechne jeweils die Anzahl der Rechenoperationen für $n = 2, 3, 5, 10$ und vergleiche.
Tipp: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Lösung: Wir betrachten zunächst die Berechnung mit Hilfe der Laplaceschen Entwicklungssatzes. Beim Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte sind $n-1$ Additionen, n Multiplikationen und n Determinantenberechnungen von $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen auszuführen. Um die Determinanten der $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen durch Zeilen- oder Spaltenentwicklung zu berechnen sind *jeweils* $n-2$ Additionen, $n-1$ Multiplikationen und $n-1$ Determinantenberechnungen von $(n-2)\times(n-2)$-Matrizen auszuführen. Setzt man dies fort, sind im letzten Schritt $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3$ Determinanten von 2×2-Matrizen zu berechnen, wozu *jeweils* eine Addition und zwei Multiplikationen benötigt werden. Dann gilt für die Gesamtzahl A_L der Additionen

$$A_L = (n-1) + n(n-2) + n(n-1)(n-3) + \ldots + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1 = \sum_{i=2}^{n} \frac{n!}{i(i-2)!}$$

und für die Gesamtzahl M_L der Multiplikation

$$M_L = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{i!}.$$

Daher werden insgesamt

$$O_L := A_L + M_L = \sum_{i=2}^{n} \frac{n!}{i(i-2)!} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{i!}$$

Operationen ausgeführt.
Beim zweiten Verfahren muß zunächst eine obere Dreiecksmatrix erzeugt werden. Um in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen Nullen zu erzeugen sind $(n-1)$ Divisionen, $(n-1)^2$ Multiplikationen und $(n-1)^2$ Additionen erforderlich. Um in der zweiten Spalte unterhalb der Diagonalen Nullen zu erzeugen sind $(n-2)$ Divisionen, $(n-2)^2$ Multiplikationen und $(n-2)^2$ Additionen erforderlich und so weiter. Das heißt, es werden

$$D_G := n - 1 + n - 2 + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Divisionen,

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Multiplikationen und

$$A_G := (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Additionen benötigt. Danach müssen noch die Diagonalelemente miteinander multipliziert werden, wozu nochmal $n-1$ Multiplikationen ausgeführt werden. Folglich ist $M_G := \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n - 1$ die Anzahl der Multiplikationen.Insgesamt sind daher

$$\begin{aligned} O_G := A_G + D_G + M_G &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n - 1 \\ &= \frac{4n^3 - 6n^2 + 2n + 3n^2 - 3n + 6n - 6}{6} = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n - 6}{6} \end{aligned}$$

Operationen notwendig.
Für konkrete n erhält man:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
O_L	0	3	14	63	324	1955	13698	109599	986408	9864099
O_G	0	4	15	37	74	130	209	315	452	624

Offensichtlich ist der Aufwand bei der Verwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes nur für $n = 2$ und $n = 3$ ein wenig kleiner als bei der Transformation auf eine obere Dreiecksmatrix. Mit wachsendem n steigt der Aufwand extrem schnell, sodaß selbst beim Benutzen eines Computers der Aufwand für die Berechnung mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes auch für kleine Matrizen inakzeptabel ist. Daher verwenden Programme wie zum Beispiel Matlab die zweite Methode.