Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
17. Mai 2010

3. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf"

Gruppenübung

Aufgabe G9 (Minitest)
Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & e \\ f & c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Welche Ausdrücke sind definiert?
☐ AD ☐ BA ☐ $A+B$ ☐ D^2 ☐ CA

Seien $A \in \mathbb{R}_n^m, B \in \mathbb{R}_m^k$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?
☐ $(AB)^T = A^T B^T$
☐ $(AB)^T = B^T A$
☐ $(AB)^T = B^T A^T$

Seien $A, B \in \mathbb{R}_n^n$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?
☐ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
☐ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
☐ $(AB)^{-1}B = A$

Lösung: Im ersten Teil sind die zweite Aussage (BA) und die fünfte (CA) richtig. Im zweiten Teil ist die letzte Aussage richtig und im dritten Teil ist die zweite Aussage richtig.

Aufgabe G10 (elementare Matrixumformungen)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme eine Matrix $E_{21}(4) \in \mathbb{R}_2^2$, so dass das Produkt $E_{21}(4) \cdot A$ diejenige Matrix ist, welche aus A entsteht, indem man das 4-fache der ersten Zeile zur zweiten addiert.

b) Bestimme eine Matrix $T_{12} \in \mathbb{R}_2^2$, so dass $T_{12} \cdot A$ diejenige Matrix ist, welche aus A durch Vertauschen der ersten und zweiten Zeile entsteht. (T steht hier für Transposition)

Die gewonnenen Erkenntnisse wollen wir nun etwas allgemeiner fassen:

c) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j \neq k$. Bestimme eine Matrix $E_{jk}(\lambda) \in \mathbb{R}_n^n$, so dass für jedes $A \in \mathbb{R}_n^n$ das Produkt $E_{jk}(\lambda) \cdot A$ diejenige Matrix ist, welche aus A entsteht indem man das λ-fache der k-ten Zeile zur j-ten Zeile addiert.

d) Sei $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \neq k$. Bestimme eine Matrix $T_{jk} \in \mathbb{R}^n_n$, so dass für jedes $A \in \mathbb{R}^n_n$ das Produkt $T_{jk} \cdot A$ diejenige Matrix ist, welche aus A durch Vertauschen der j-ten und der k-ten Zeile entsteht.

e) Sei $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Bestimme eine Matrix $D_j(\lambda) \in \mathbb{R}^n_n$, so dass für jedes $A \in \mathbb{R}^n_n$ das Produkt $D_j(\lambda) \cdot A$ diejenige Matrix ist, welche aus A durch Multiplizieren der j-ten Zeile mit λ entsteht.

Lösung:

(a) $E_{21}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $T_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Die Lösung könnte man aus der vorhergehenden Aufgabe erraten. Trotzallem wollen wir hier einen systematischen Lösungsweg angeben, welcher gleichzeitig zeigt, dass die Matrix $E_{jk}(\lambda)$ eindeutig ist. Es seinen x_{ml} die (noch) bekannten Einträge von $E_{jk}(\lambda)$ und es sei $A \in \mathbb{R}^n_n$ mit den Einträgen a_{ml}. Ist $m \neq j$, dann entspricht die l-te Zeile von $E_{jk}(\lambda)A$ genau der l-ten Zeile von A, d.h.

$$(\forall m \in \{1, \dots, n\}) \quad \sum_{i=1}^{n} x_{li} a_{im} = a_{lm}.$$

Da dieses für beliebige Matrizen A gilt, muss also $x_{ll} = 1$ und $x_{li} = 0$ für $i \neq l$ gelten. Betrachten wir die j-te Zeile von $E_{jk}(\lambda)A$, so sehen wir

$$(\forall m \in \{1, \dots, n\}) \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ji} a_{im} = a_{jm} + \lambda a_{km}.$$

Damit folgt $x_{jj} = 1, x_{jk} = \lambda$ und $x_{ji} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}\backslash\{j, k\}$. Insgesamt ergibt sich also, dass $E_{jk}(\lambda)$ die $n \times n$ Einheitsmatrix ist mit dem Eintrag (j, k) gleich λ anstatt von 0, also

$$E_{jk} = \begin{array}{c c} & \\ j \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \lambda & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{c} \uparrow \\ k \end{array} \end{array}$$

(d) Die Matrix T_{jk} ist die Einheitsmatrix mit j-ter und k-ter Zeile vertauscht.

(e) Die Matrix $D_j(\lambda)$ ist die Einheitsmatrix mit dem j-ten Diagonalelement λ anstatt 1.

Aufgabe G11 (Matrizen)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, falls möglich, folgende Summen: $A + B$, $A + C$ und $B + C$.

(b) Berechnen Sie, falls möglich, folgende Produkte: A^2, AB, BA, $B^T A$ und B^2.

(c) Wie viele Operationen (Additionen, Multiplikationen) sind nötig, um die Summe zweier $n \times n$-Matrizen zu berechnen? Wie viele Operationen sind nötig, um das Produkt von zwei $n \times n$-Matrizen zu berechnen?

Lösung:

(a) Aufgrund der Größe der Matrizen ist nur die Summe $A + C$ definiert:

$$A + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} .$$

(b) Es sind nur die Produkte A^2, AB und $B^T A$ erklärt:

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 10 \\ 10 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 14 \end{pmatrix} , \qquad AB = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 11 & 13 \\ 13 & 7 & 8 & 11 \\ 12 & 10 & 9 & 11 \end{pmatrix} , \qquad B^T A = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 12 \\ 10 & 7 & 10 \\ 11 & 8 & 9 \\ 13 & 11 & 11 \end{pmatrix} .$$

(c) Für die Berechnung der Summe wird eine Addition für jeden Eintrag, also n^2 Additionen, und keine Multiplikation benötigt. Für die Berechnung des Produktes werden für jeden Eintrag n Multiplikationen und $n - 1$ Additionen benötigt, also insgesamt $n^2(n - 1) = n^3 - n^2$ Additionen und $n^2 \cdot n = n^3$ Multiplikationen.

Aufgabe G12 (Lineare Abbildungen und Matrizen)

(a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten beschreibt. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix, d.h. ermitteln Sie diejenige Matrix A_φ, bezüglich der

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(b) Die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist bestimmt durch

$$\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ermitteln Sie erneut eine Matrix A_ψ mit

$$\psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie die zu $\psi \circ \varphi$ gehörige Abbildungsmatrix.

Lösung:

(a) Eine lineare Abbildung ist nach Satz VII.3.7 durch die Bilder der Basisvektoren bereits eindeutig festgelegt. Mit

$$\varphi(e_1) = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} =: a_1$$

und

$$\varphi(e_2) = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} =: a_2$$

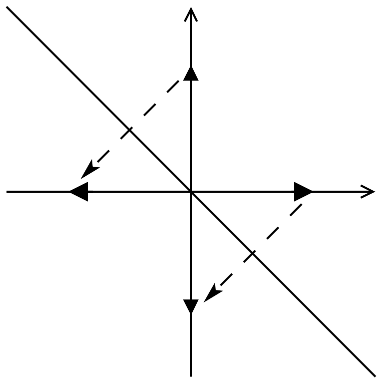
folgt

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\,a_1 + y\,a_2 = x\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A_\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, wobei

$$A_\varphi := \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}.$$

<u>Skizze:</u>



(b)

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Als nächstes bestimmen wir die Bilder der Basisvektoren, wozu wir sinnvollerweise die einzigen uns bekannten Werte

$$\psi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

verwenden. Wegen

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

folgen mit der Linearität von φ die Beziehungen

$$\psi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \psi\left(2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = 2\,\psi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \psi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

und

$$\psi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \psi\left(-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = -\psi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\psi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$\psi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\,\psi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\,\psi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\\-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

und wir erhalten

$$A_\psi = \begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\\-5&3\end{pmatrix}.$$

(c) Nach Satz VII.4.7 folgt

$$A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi\cdot A_\varphi = \begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\\-5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\\-3&5\end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H9 (Vektorraum der linearen Abblidungen)
Seien V und W zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$. Zeige, dass die Menge der linearen Abbildungen (Homomorphismen) $Hom(V,W)$ zwischen V und W ein Vektorraum ist.
Hinweis: Seien $f,g\in Hom(V,W)$ und $\alpha\in\mathbb{K}$, dann gelten die folgenden Definitionen:
Definition der Addition: $f+g:(f+g)(x):=f(x)+g(x)\quad\forall x\in V$.
Definition der Skalarmultiplikation: $\alpha\cdot f:(\alpha\cdot f)(x):=\alpha\cdot f(x)\quad\forall x\in V$.

Lösung: Seien $f,g,h\in Hom(V,W)$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, dann gilt:
(V1): $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$
(V2): $((f+g)+h)(x)=(f+g)(x)+h(x)=f(x)+g(x)+h(x)=f(x)+(g+h)(x)=(f+(g+h))(x)$
(V3): Die Nullabbildung $n:V\to W, x\mapsto 0$ erfüllt diese Bedingung
(V4): Die Abbildung $f_2V\to W$ mit $f_2=-f_1$ erfüllt diese Bedingung, wobei $f_1\in Hom(V,W)$ und somit linear ist.
(V5): $(\alpha\cdot(f+g))(x)=\alpha\cdot(f+g)(x)=\alpha\cdot(g(x)+f(x))=\alpha\cdot g(x)+\alpha\cdot f(x)$
(V6): $((\alpha+\beta)\cdot f)(x)=(\alpha+\beta)\cdot f(x)=\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot f(x)$
(V7): $((\alpha\cdot\beta)\cdot f)(x)=(\alpha\cdot\beta)\cdot f(x)=\alpha\cdot\beta\cdot f(x)=\alpha\cdot(\beta\cdot f(x))=\alpha\cdot(\beta\cdot f)(x)$
(V8): $1\cdot f(x)=f(x)$
Somit bildet die Menge aller linearen Abbildungen einen Vektorraum. Man hätte dies auch beweisen können, indem man zeigt, dass die Menge der linearen Abbildungen einen Untervektorraum des Vektorraums aller Abbildungen von V nach W bildet.

Aufgabe H10 (Lineare Abbildungen)
Kreuzen Sie diejenigen Abbildungen an, die linear sind:

- ☐ $\phi_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \phi_1(x,y,z):=(x+y,\ x+z,\ y-z)^T,$
- ☐ $\phi_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad \phi_2(x,y):=(x^2,\ y^2,\ x-y)^T,$
- ☐ $\phi_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4,\quad \phi_3(x,y,z):=\big(2(x+y),\ x-y,\ x-z,\ 2\big)^T,$
- ☐ $\phi_4:\mathbb{R}\ \to\mathbb{R}^3,\quad \phi_4(x):=(0,x,2x)^T,$
- ☐ $\phi_5:\mathbb{R}\ \to\mathbb{R}^3,\quad \phi_5(x):=\phi_1\big(\phi_4(x)\big).$

Bestimmen Sie für die linearen Abbildungen jeweils die darstellende Matrix (bzgl. der Standardbasis) und die Dimension von Kern und Bild der Abbildung.

Lösung:

(a) Für alle $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\phi_1\big((x, y, z) + (x', y', z')\big) &= \phi_1(x + x',\ y + y',\ z + z') \\
&= (x + x' + y + y', x + x' + z + z', y + y' - z - z')^T \\
&= (x + y,\ x + z,\ y - z)^T + (x' + y',\ x' + z',\ y' - z')^T \\
&= \phi_1(x, y, z) + \phi_1(x', y', z')\ , \\
\phi_1\big(\lambda(x, y, z)\big) &= \phi_1(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x + \lambda z, \lambda y - \lambda z)^T \\
&= \lambda(x + y, x + z, y - z)^T = \lambda\phi_1(x, y, z)\ .
\end{aligned}$$

Die Abbildung ϕ_1 ist linear (nachrechnen!). Die darstellende Matrix ist durch

$$A_1 = \big(\ \phi(1,0,0) \mid \phi(0,1,0) \mid \phi(0,0,1)\ \big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Kern besteht genau aus allen Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $\phi(x, y, z) = 0$, d.h.

$$x + y = 0\ , \qquad x + z = 0\ , \qquad y - z = 0\ .$$

Als Lösungsmenge ergeben sich genau die Vielfachen von $(1, -1, -1)$, also ein eindimensionaler Teilraum. Es gilt somit $\dim(\operatorname{Kern}\phi_1) = 1$. Nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen folgt $\dim(\operatorname{Bild}\phi_1) = 2$.

(b) Die Abbildung ϕ_2 ist nicht linear, denn $\phi_2(2, 0) = \phi_2(2 \cdot (1, 0)) \neq 2 \cdot \phi_2(1, 0)$.

(c) Die Abbildung ϕ_3 ist nicht linear wegen $\phi_3(0) \neq 0$.

(d) Die Abbildung ϕ_4 ist linear (nachrechnen!) mit der darstellenden Matrix

$$A_4 = \phi(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ .$$

Nach dem Dimensionssatz kann das Bild höchstens eindimensional sein. Weil ϕ_4 nicht konstant Null ist, gilt $\dim(\operatorname{Bild}\phi_4) = 1$ und nach Dimensionsatz $\dim(\operatorname{Kern}\phi_4) = 0$.

(e) Die Abbildung ϕ_5 ist linear, weil sie Komposition der linearen Abbildung ϕ_4 und ϕ_1 ist. Die darstellende Matrix ist das Produkt der darstellenden Matrizen von ϕ_4 und ϕ_1:

$$A_5 = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\ .$$

Analog zur Argumentation für ϕ_4 ist das Bild eindimensional, und der Kern hat Dimension 0.

Aufgabe H11 (lineare Abbildungen)

Betrachten Sie die Vektoren $v_1 := (1, 0, 0)^T$, $v_2 := (1, 1, 0)^T$, $v_3 := (1, 1, 1)^T$ und $v_4 := (3, 2, 1)^T$. Weiter sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $\phi(v_1) = (2, 1, 2)^T$, $\phi(v_2) = (1, 2, 1)^T$ und $\phi(v_3) = (3, 2, 1)^T$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von ϕ (bzgl. der Standardbasis).

(c) Berechnen Sie $\phi(v_4)$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = (0,0,1)^T \cdot v_3 = 1 \neq 0 \, .$$

Das Gleichungssystem $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$ hat somit genau eine Lösung $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, d.h. die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.

(b) Für die Einheitsvektoren $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$ und $e_3 = (0,0,1)^T$ gilt

$$\begin{aligned}
\phi(e_1) &= \phi(v_1) = (2,1,2)^T \, , \\
\phi(e_2) &= \phi(v_2 - v_1) = \phi(v_2) - \phi(v_1) = (-1,1,-1)^T \, , \\
\phi(e_3) &= \phi(v_3 - v_2) = \phi(v_3) - \phi(v_2) = (2,0,0)^T \, .
\end{aligned}$$

Die darstellende Matrix von ϕ ist somit durch

$$A = \left(\ \phi(e_1) \ \middle| \ \phi(e_2) \ \middle| \ \phi(e_3) \ \right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(c) Weil $\phi(v) = Av$ für alle Vektoren v gilt, folgt

$$\phi(v_4) = Av_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \, .$$

Aufgabe H12 (Vektorraum Isomorphismus)

Laut Definition VIII.3.8 heißt eine lineare Abbildung $f : V \to W$ Vektorraumisomorphismus, wenn eine lineare Abbildung $g : W \to V$ existiert mit $g \circ f = id_V$ und $f \circ g = id_W$. Vektorräume V und W heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass ein Vektorraumisomorphismus immer eine bijektive Funktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass bijektive lineare Abbildungen Isomorphismen sind, d.h. dass die Umkehrabbildung auch wieder linear ist.

Lösung:

(a)
- f ist injektiv:
  Injektivität bedeutet: $\forall x_1, x_2 \in V : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
  Seien also $x_1, x_2 \in V$ mit $x_1 \neq x_2$. Nimm an, $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt $g \circ f(x_1) = x_1$ und $g \circ f(x_2) = x_2$ wegen $g \circ f = id_V$. Also insbesondere ist $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$. Da aber $f(x_1) = f(x_2)$ führt dies zum Widerspruch.
- f ist surjektiv:
  Surjektivität bedeutet: $\forall y \in W \exists x \in V : f(x) = y$
  Sei $y \in W$. Dann ist $g(y) = v \in V$. Da $f \circ g(y) = y$ folgt, $f(v) = y$. Daraus folgt, dass $\exists x \in V : f(x) = y$ mit $x = v = g(y)$.

(b)
- $f^{-1}(f(x) + f(y)) = f^{-1}(f(x+y)) = x + y = f^{-1}(f(x)) + f^{-1}(f(y))$
- $f^{-1}(\lambda f(x)) = f^{-1}(f(\lambda x)) = \lambda x = \lambda f^{-1}(f(x))$

Aufgabe H13 (Matrizen)

Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) die Determinante $\det(A_\alpha)$,

(b) den Rang, den Kern und das Bild von A_α,

(c) das Inverse A_0^{-1}

und lösen Sie die Gleichungssysteme

$$A_0 x = (1,2,1)^T \qquad \text{und} \qquad A_0 y = (2,4,-1)^T .$$

Lösung:

(a) Wir entwickeln nach der ersten Spalte:

$$\det(A_\alpha) = 1 \cdot (\alpha^2 - 2^2) - 1 \cdot (2\alpha - 1 \cdot 2) + 1 \cdot (2^2 - 1 \cdot \alpha) = \alpha^2 - 3a + 2 = (\alpha - 1)(\alpha - 2) .$$

(b) Wegen $\det(A_\alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - 2)$ ist die Matrix A_α genau dann invertierbar, wenn $\alpha \neq 1$ und $\alpha \neq 2$ gilt. In diesem Fall hat A_α also Rang 3, der Kern ist trivial $\operatorname{Kern} A_\alpha = \{ 0 \}$ und das Bild ist ganz $\mathbb{R}^3$.

Betrachten wir jetzt den Fall $\alpha = 1$, also die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Man sieht sofort dass die ersten beiden Spalten linear unabhängig sind. Die Matrix A_1 hat damit mindestens Rang 2. Weil sie nicht invertierbar ist, hat sie nicht vollen Rang (Rang 3), d.h. der Rang von A_1 ist 2. Nach der Definition des Ranges ist das Bild der Matrix ein zweidimensionaler Teilraum und wird von den ersten beiden (linear unabhängigen) Spalten aufgespannt, d.h.

$$\operatorname{Bild} A_1 = \left\{ \lambda(1,1,1)^T + \mu(2,1,2)^T \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} .$$

Nach dem Dimensionssatz ist der Kern von A_1 ein eindimensionaler Teilraum. Es genügt deshalb einen einzigen Vektor im Kern zu finden. Durch Raten sieht man leicht, dass der Vektor $(-3,1,1)^T$ im Kern liegt, d.h.

$$\operatorname{Kern} A_1 = \left\{ \lambda(-3,1,1)^T \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} .$$

Betrachten wir nun den Fall $\alpha = 2$, also die Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Hier sieht man sofort, dass die erste und die letzte Spalte linear unabhängig sind. Analog zur Argumentation für A_1 hat die Matrix A_2 somit Rang 2 und es gilt

$$\operatorname{Bild} A_2 = \left\{ \lambda(1,1,1)^T + \mu(1,2,2)^T \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} .$$

Nach dem Dimensionssatz ist der Kern von A_2 eindimensional und es genügt einen Vektor im Kern zu finden. Durch Raten sieht man leicht, dass der Vektor $(2,-1,0)^T$ im Kern liegt, d.h.

$$\text{Kern}\, A_2 = \left\{ \lambda(2,-1,0)^T \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} .$$

(c)

$$\begin{array}{rrr|rrrr}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \text{1. Zeile von 2., 3. Zeile abziehen} \\ \hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & \text{3. Zeile zu 1., 2. Zeile addieren} \\ \hline
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & \text{2. Zeile zur 1. Zeile addieren} \\ \hline
1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & \\
0 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & \text{2., 3. Zeile normieren} \\ \hline
1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & \\
0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Inversen von A_0^{-1} sind die Lösungen der Gleichungssysteme gegeben durch

$$x = A_0^{-1}\,(1,2,1)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$y = A_0^{-1}\,(2,4,-1)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} .$$