Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
27.–30. April

2. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

Gruppenübung

Aufgabe G5 (Vektorräume)

Kreuze an welche der folgenden Mengen (mit der aus der Mathe I bekannten Addition und skalaren Multiplikation) Vektorräume sind. Gib bei den Mengen, die keine Vektorräume sind, eine Vektorraumeigenschaft an, die verletzt ist.

☒ Die Menge der Polynome mit Grad kleiner gleich drei.

☒ Die Menge der reellen Folgen.

☐ Die Menge der streng monoton wachsenden Funktionen.

Lösung: Die Menge der streng monoton wachsenden Funktionen ist kein Vektorraum. Zum Beispiel ist die Vektorraumeigenschaft (V3) verletzt, denn die Funktion 0 (das heißt die Funktion die konstant Null ist) ist nicht streng monoton wachsend.

Aufgabe G6 (Produkte in $\mathbb{R}^3$)

Rechne die Formel aus dem Skript (s. 112, ganz unten)

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

(mit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$) nach.

Lösung: Dies ist einfaches Einsetzen in die Definitionen.

Aufgabe G7 (Lineare Abbildungen)

(a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y)^T \mapsto (2y, x + y)^T$$
$$h : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) : u \mapsto u'$$

Gib bei den *linearen* Abbildungen jeweils den Kern und das Bild an und bei den linearen Abbildungen zwischen *endlichdimensionalen* Vektorräumen die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis an.

Kommentar zur Notation: $C^1(\mathbb{R})$ steht für den Vektorraum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $C^0(\mathbb{R})$ für den Vektorraum aller stetigen Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mit u' wird die erste Ableitung der Funktion u bezeichnet.

(b) Zeige, dass die Umkehrabbildung einer bijektiven linearen Abbildung auch wieder linear ist.

Lösung:

(a) Es ist $f(1,1) = 1$, $f(2,2) = 4$. Wäre f linear, müsste aber $f(2,2) = f(2\cdot(1,1)) = 2\cdot f(1,1) = 2$ gelten, also ist f nicht linear.

Für alle (x_1, x_2),$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} g(\lambda(x_1,x_2) + \mu(y_1,y_2)) &= g(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= (2\lambda x_2 + 2\mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2)^T \\ &= (2\lambda x_2, \lambda(x_1 + x_2))^T + (2\mu y_2, \mu(y_1 + y_2))^T \\ &= \lambda g(x_1, x_2) + \mu g(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Folglich ist g ist linear.

Für alle $u, v \in C^1(\mathbb{R})$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} (h(\lambda u + \mu v))(x) &= (\lambda u + \mu v)'(x) = \lambda u'(x) + \mu v'(x) \\ &= \lambda(h(u))(x) + \mu(h(v))(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt $h(\lambda u + \mu v) = \lambda h(u) + \mu h(v)$. Damit ist h linear.

Es soll zunächst der Kern von g bestimmt werden, das heißt die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & g(x,y) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2y \\ x+y \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Folglich gilt $\ker(g) = \{0\}$. Damit folgt aus dem Dimensionsatz $0 + \dim(\operatorname{rng}(g)) = 2$ und damit $\operatorname{rng}(g) = \mathbb{R}^2$.

Aus der Mathe I ist bekannt, dass jede stetige Funktion u eine Stammfunktion U besitzt, das heißt $U' = u$. Daraus folgt $\operatorname{rng}(h) = C^0(\mathbb{R})$. Außerdem ist bekannt, dass die Funktionen, deren Ableitung Null ist, gerade die konstanten Funktionen sind, das heißt $\ker(h) = \{u \in C^1(\mathbb{R}) \mid u \text{ konstant}\}$.

Es ist noch die Abbildungsmatrix von g zu bestimmen. Deren Spalten sind die Bilder der Standardeinheitsvektoren:

$$\begin{pmatrix} g(e_1) & g(e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Siehe H12.

Hausübung

Aufgabe H2 (Basen und Koordinaten)

(a) Betrachte das gleichseitige Dreieck, dessen Ecken die Koordinaten $\binom{0}{0}$ und $\binom{1}{0}$ (bezüglich der Standardbasis) besitzen und dessen dritte Ecke positive Koordinaten hat. Finde eine Basis bezüglich derer die Ecken ganzzahlige Koordinaten besitzen.

(b) Betrachte ein gleichseitiges Sechseck mit Seitenlänge 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt. Läßt sich eine Basis finden bezüglich derer die Ecken ganzzahlige Koordinaten besitzen?

Lösung:

(a) Wählt man als Basisvektoren die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

dann besitzen die Ecken bezüglich dieser Basis die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wählt man als ersten Basisvektor c den Koordinatenvektor einer Ecke des Sechseckes und als zweiten Basisvektor d den Koordinatenvektor der linken Nachbarecke, dann besitzen die Ecken bezüglich dieser Basis die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Siehe Abbildung 1.

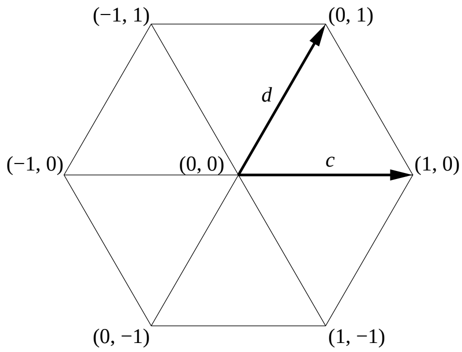

Abbildung 1: Ein Sechseck mit ganzzahligen Koordinaten.

Aufgabe H3 (Lineare Hülle)

Sei V ein Vektorraum und $S \subset V$. Die lineare Hülle von S wurde in der Vorlesung als der kleinste Vektorraum, der S enthält, definiert, das heißt

$$\mathrm{Sp}(S) := \bigcap_{\substack{U \supset S \\ U \text{ Untervektorraum von } V}} U.$$

Zeige, dass die so definierte lineare Hülle von S der Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus S entspricht, das heißt

$$\mathrm{Sp}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\, s_i \in S \right\}.$$

Tipp: Zeige, dass die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus S ein Untervektorraum von V ist, der S enthält.

Lösung: Da $\operatorname{Sp}(S)$ definitionsgemäß ein Untervektorraum von V ist, der S enthält, enthält $\operatorname{Sp}(S)$ nach der Untervektorraumdefinition auch alle Linearkombinationen von Elementen aus S. Folglich gilt

$$\operatorname{Sp}(S) \supset \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ s_i \in S \right\} =: L.$$

Andererseits gilt offensichtlich $L \supset S$ und, da Linearkombinationen von Elementen aus L wieder Linearkombinationen von Elementen aus S sind, ist L auch ein Untervektorraum von V. Daraus folgt $\operatorname{Sp}(S) \subset L$ und insgesamt $\operatorname{Sp}(S) = L$.

Aufgabe H4 (Lineare Abbildungen & Matrizen, Kern & Bild)
Wir betrachten die linearen Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(x_1, x_2) = (x_2, x_1, 3x_1 - x_2), \qquad \Psi(y_1, y_2, y_3) = y_2 + y_3 - y_1.$$

(a) Bestimme die zu Φ, Ψ und $\Psi \circ \Phi$ gehörigen Abbildungsmatrizen (bezüglich der Standardbasis). (Hierbei gilt $(\Psi \circ \Phi)(x) = \Psi(\Phi(x))$.)

(b) Gib Basen von $\ker(\Phi)$ und $\operatorname{rng}(\Phi)$ an und verifiziere an diesem Beispiel die Dimensionsformel.

Lösung:

(a) *Merkregel:* In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren.
Für Φ müssen $\Phi(e_1) = \Phi(1, 0)$ und $\Phi(e_2) = \Phi(0, 1)$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\Phi(1,0) &= (0, 1, 3 \cdot 1 - 0)^T = (0, 1, 3)^T,\\ \Phi(0,1) &= (1, 0, 3 \cdot 0 - 1)^T = (1, 0, -1)^T.\end{aligned}$$

Daher ist die Abbildungsmatrix von Φ

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für Ψ gilt

$$\Psi(1, 0, 0) = -1, \qquad \Psi(0, 1, 0) = \Psi(0, 0, 1) = 1,$$

also

$$A_\Psi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Abbildungsmatrix von $\Psi \circ \Phi$ gilt dann

$$A_{\Psi\circ\Phi} = A_\Psi A_\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\ker(\Phi) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x) = 0 \right\}\\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_2, x_1, 3x_1 - x_2) = (0, 0, 0) \right\}\\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \wedge x_1 = 0 \wedge 3x_1 - x_2 = 0 \right\}\\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

Die Basis von $\ker(\Phi)$ ist damit die leere Menge.
Für das Bild von Φ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{rng}(\Phi) = \Phi(\mathbb{R}^2) &= \left\{(x_2, x_1, 3x_1 - x_2)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, bilden diese beiden Vektoren eine Basis von $\operatorname{rng}(\Phi)$.
Damit gilt

$$\dim(\ker(\Phi)) + \dim(\operatorname{rng}(\Phi)) = 0 + 2 = 2 = n$$

wie von der Dimensionsformel vorhergesagt.

Aufgabe H5 (Vektorraumisomorphismen und Basen)
Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ ein Vektorraumisomorphismus. Zeige, dass f Basen erhält, das heißt wenn $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V ist, dann ist $f(b_1), \dots, f(b_n)$ eine Basis von W.

Lösung: Da f ein Vektorraumisomorphismus ist, gibt es eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_V$ und $g \circ f = \mathrm{id}_W$.
Es soll zunächst gezeigt werden, dass $f(b_1), \dots, f(b_n)$ linear unabhängig sind. Angenommen dies wäere nicht der Fall. Dann gäbe es Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich null sind, mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) = 0 \\ \Rightarrow\quad & g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i)\right) = g(0) \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{g(f(b_i))}_{=b_i} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0. \end{aligned}$$

Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass $b_1, \dots, b_n$ lienar unabhängig sind. Folglich sind $f(b_1), \dots, f(b_n)$ linear unabhängig.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $f(b_1), \dots, f(b_n)$ ein Erzeugendensystem von W ist. Sei $w \in W$. Dann ist $g(w) \in V$ und $g(w)$ läßt sich als Linearkombination von $b_1, \dots, b_n$ darstellen, das heißt

es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} g(w) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \\ \Rightarrow \quad f(g(w)) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) \\ \Leftrightarrow \quad w &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i). \end{aligned}$$

Folglich läßt sich w als Linearkombination von $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ darstellen. Da w beliebig gewählt war, ist $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ ein Erzeugendensystem von W und damit auch eine Basis.