Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
3. Mai 2010

1. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lineare Unabhängigkeit)

Welche der folgenden Teilmengen von Vektoren aus $\mathbf{R}^3$ sind linear unabhängig und welche linear abhängig?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Also lässt sich $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der beiden anderen Vektoren darstellen und die Vektoren sind linear abhängig.

(b) Jede Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

(c) Wegen

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & 3\alpha_2 = 0 = \alpha_3 = 2\alpha_1 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

sind die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe G2 (Unterräume)
Betrachte den Vektorraum $\mathbf{R}^2$. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbf{R}^2$ sind Unterräume:

(a) Die Menge von Punkten der Geraden, die durch die Punkte $(1,1)$ und $(2,2)$ geht,

(b) die Menge von Punkten der Geraden, die durch die Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ geht,

(c) die Menge, die nur den Punkt $(0,0)$ enthält,

(d) die Menge von Punkten, deren Koordinaten beide positiv sind?

Lösung:

(a) Bezeichnet G die Menge der Punkte auf der Geraden, dann ist

$$G = \{(1,1) + t(1,1) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

Für zwei beliebige Punkte $p = (1,1) + t(1,1)$ und $q = (1,1) + s(1,1)$ gilt dann

$$p + q = (1,1) + t(1,1) + (1,1) + s(1,1) = (1,1) + \underbrace{(t+s+1)}_{\in \mathbf{R}}(1,1) \in G.$$

Außerdem gilt für $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda p = \lambda(1,1) + \lambda t(1,1) = (1,1) + \underbrace{(\lambda + \lambda t - 1)}_{\in \mathbf{R}}(1,1) \in G.$$

Folglich ist G ein Unterraum von $\mathbf{R}^2$.

(b) Bezeichnet G die Menge der Punkte auf der Geraden, dann ist

$$G = \{(1,0) + t(-1,1) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

Da $(0,0)$ nicht in G enthalten ist, ist G kein Unterraum von $\mathbf{R}^2$.

(c) Da $(0,0) + (0,0) = (0,0)$ und $\lambda(0,0) = (0,0)$ für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ gilt, ist $\{(0,0)\}$ ein Unterraum von $\mathbf{R}^2$.

(d) Der Punkt $(1,1)$ hat positive Koordinaten, aber $-1(1,1) = (-1,-1)$ hat keine. Folglich ist die Menge von Punkten, deren Koordinaten beide positiv sind, kein Unterraum von $\mathbf{R}^2$.

Aufgabe G3 (Orthonormalbasis)
Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Stellen sie den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

Lösung: Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \cdot v_2 = 0 \\ v_1 \cdot v_3 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sind paarweise orthogonal.}$$

Es gilt ferner:

$$\left.\begin{array}{lcl} |v_1| & = & \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \\ |v_2| & = & 1 \\ |v_3| & = & \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sind normiert.}$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1+\alpha_3) \\ \alpha_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1-\alpha_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.
Es folgt also, dass v_1, v_2, v_3 eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Daher gilt

$$\begin{aligned} v &= (v_1 \cdot v)\, v_1 + (v_2 \cdot v)\, v_2 + (v_3 \cdot v)\, v_3 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) v_1 + 2v_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) v_3 \\ &= 2\sqrt{2} v_1 + 2v_2 - \sqrt{2} v_3. \end{aligned}$$

Aufgabe G4 (Erzeugendensystem)
Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$ bilden. Welche Teilmengen dieser drei Vektoren bilden eine Basis?
Lösung:

(i)

$$\begin{array}{ll} & \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_2 + \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & 2\alpha_1 - \alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\alpha_1 = \alpha_1 \Rightarrow 2\alpha_2 + \alpha_2 = 3\alpha_2 = 0 \\ & \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ & \Rightarrow \alpha_1 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow v_1, v_2$ sind linear unabhängig.

(ii)

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_3 + 2\alpha_2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha_2 = -\alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 - 4\alpha_3 = -3\alpha_3 = 0 \\
& \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\
& \Rightarrow \alpha_2 = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow v_2, v_3$ sind linear unabhängig.

(iii)

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_3 - \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\alpha_3 + \alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_3 - \alpha_1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha_1 = \alpha_3 \Rightarrow 2\alpha_3 + \alpha_3 = 3\alpha_3 = 0 \\
& \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\
& \Rightarrow \alpha_1 = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow v_1, v_3$ sind linear unabhängig.

Demnach sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 paarweise linear unabhängig und jedes Paar bildet wegen $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$ sogar eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, aber keine Basis (drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig).

Hausübung

Aufgabe H1 (Unterräume) (6 Punkte)

(a) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbf{R}^n$:

i. $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = a\}$ $(a \in \mathbf{R})$,

ii. $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_2 = 0\}$,

iii. $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_2 = 0\}$,

iv. $\{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1\}$?

(b) Seien U und W Unterräume eines Vektorraums V. Beweise oder widerlege:

i. Der Schnitt $U \cap W$ ist ein Unterraum von V.

ii. Die Vereinigung $U \cup W$ ist ein Unterraum von V.

Lösung:

(a) i. Sei $U_a = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = a\}$.
Für $a \neq 0$ ist $0 \notin U_a$ und damit U_a kein Unterraum.
Für $p, q \in U_0$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ gilt $(p+q)_1 = 0$ und $(\lambda p)_1 = 0$. Folglich ist sowohl $p + q \in U_0$ als auch $\lambda p \in U_0$ und daher U_0 ein Unteraum.

ii. Sei $U = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_2 = 0\}$. Dann sind die Vektoren $e_1, e_2 \in U$ aber $e_1 + e_2 \notin U$. Folglich ist U kein Unterraum.

iii. Sei $U = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_2 = 0\}$. Nach Aufgabenteil (a)i. sind $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\}$ und $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_2 = 0\}$ Unterräume und damit ist nach Aufgabenteil (b)i. auch U ein Unterraum.

iv. Sei $U = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1\}$. Der Vektor ist e_1 in U aber der Vektor $2e_1$ nicht, da $|2e_1| = 2$. Folglich ist U kein Unterraum.

(b) i. Es gilt $U \cap W \subset V$, da $U \subset V$ und $W \subset V$. Für $p, q \in U \cap W$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ gilt $p, q \in U$ und damit $p + q \in U$ und $\lambda p \in U$ sowie $p, q \in W$ und damit $p + q \in W$ und $\lambda p \in W$. Folglich ist $p + q \in U \cap W$ und $\lambda p \in U \cap W$ und daher $U \cap W$ ein Unterraum von V.

ii. Nach Aufgabenteil (a)i. und (a)ii. ist $U \cup W$ im Allgemeinen kein Unterraum.