



Mathematik II für Inf und WInf

10. Übung

Gruppenübung

G 34 Lipschitzbedingung

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lokalen oder globalen Lipschitzbedingungen genügen.

1. $f(x, y) = x^2$
2. $f(x, y) = y^2$
3. $f(x, y) = e^{xy}$

G 35 Lipschitzstetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig in $x \in D$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset D$ gibt auf der f gleichmäßig stetig ist.

b) Finden Sie eine auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetige Funktion, welche nicht Lipschitzstetig in $x = 0$ ist.

G 36 Eindeutigkeit der Lösungen

Finden Sie ein System von Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen, sodass dieses Problem $(\cos(x), \sin(x))$ als eindeutige Lösung besitzt.

Hausübung

H 34 Lipschitzbedingung

Entscheide, welche der folgenden Funktionen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer Lipschitzbedingung oder einer lokalen Lipschitzbedingung genügen.

1. $f(x, y) := x|y|$
2. $f(x, y) := \sin(|y|^{-1})$ für $y \neq 0$, $f(x, 0) = 0$ für alle x
3. $f(x, y) := \arctan(x + y)$, $n = 1$

H 35 Lösungen der DGL

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei im 2. Argument sogar lokal Lipschitzstetig.

1. Gibt es durch einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ immer eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$? Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?
2. Es gelte nun zusätzlich $f(-x, y) = -f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß dann jede Lösung y obiger DGL eine gerade Funktion ist.

H 36 Anfangswertprobleme

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = \frac{y}{x^2} + x$, $y(1) = 0$. Erfüllt die rechte Seite eine Lipschitzbedingung bzgl. y auf $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\}$? Begründen Sie, warum das Anfangswertproblem eine für alle $x > 0$ definierte eindeutige Lösung besitzt. Ausgehend von der Anfangsnäherung $y_0(x) = 0$ berechnen Sie dann die Näherungslösungen y_1, y_2, y_3 mit Picarditeration.