Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
8.-15.06.10

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf"

Gruppenübung

Aufgabe G31 (Minitest)

Überlege kurz, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in U$.

- ☐ Wenn f ein lokales Minimum oder Maximum bei x_0 besitzt, dann gilt $D(f)(x_0) = 0$.
- ☐ Wenn $D(f)(x_0) = 0$ gilt, dann besitzt f ein lokales Minimum oder Maximum bei x_0.
- ☐ Wenn $D(f)(x_0) = 0$ und $H(f)(x_0)$ positiv definit gelten, dann besitzt f eine isolierte lokale Extremstelle bei x_0.
- ☐ Wenn $D(f)(x_0) = 0$ und alle Eigenwerte von $H(f)(x_0)$ echt positiv, dann liegt in x_0 ein isoliertes lokales Maximum der Funktion vor.

Aufgabe G32 (Hessematrix)

Untersuche in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^n + y^n,$$

im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $\mathrm{H}(f)(0, 0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Wiederspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

Aufgabe G33 (Implizite Funktion)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := f(t, y(t)),$$

wobei $y(t)$ eine differenzierbare Funktion ist.

(b) Durch die Gleichungen

$$g(t) = f(t, y(t)) = 0 \quad \text{und} \quad y(-1) = 0$$

wird implizit eine differenzierbare Funktion $y(t)$ definiert. Bestimmen Sie $y'(-1)$.

Aufgabe G34 (Lagrangesche Multiplikatoren)

Bestimme das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Platz hat.

Hausübung

Aufgabe H31 (0 Punkte)

Zeigen Sie am Beispiel der zwei gegebenen Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - y^2,$$

dass der Gradient in einem Punkt senkrecht auf der Höhenlinie, die durch diesen Punkt verläuft, steht. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie den Gradienten.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion die Tangente der Höhenlinie.

(c) Zeigen Sie, dass der Gradient senkrecht auf der Tangente der Höhenlinie steht.

Aufgabe H32 (Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher) (2 Punkte)

In Satz VIII.3.8 wird der Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher formuliert. Dabei wird es notwendig, Integrale über matrixwertigen Funktionen einzuführen. Um erstmal ein Gefühl für die Sache zu bekommen, betrachten wir ein Beispiel.

a) Gegeben sei die Funktion $p :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ mit $p(t) := (t^2, t^3)$. Überlege Dir an diesem Beispiel, wo es Probleme mit der direkten Übertragung des Mittelwertsatzes für Funktionen in einer Veränderlichen gibt.

b) Wende auf die Kurve p Satz VIII.3.8 an.

c) Beweise Satz VIII.3.8. Dokumentiere jeweils die Beweisschritte und die Beweisideen.

Aufgabe H33 (implizite Funktion) (2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sin^2 y + x^3 - 1$.

a) Kann man für $(\sqrt[3]{0.5}, \pi/4)$ die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. gibt es eine geeignete Umgebung von $\sqrt[3]{0.5}$, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

b) Für welche (x_0, y_0) mit $g(x_0, y_0) = 0$ kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen, d.h. für welche (x_0, y_0) gibt es eine geeignete Umgebung von x_0, so dass in dieser Umgebung aus $g(x, y) = 0$ die Existenz einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ folgt?

c) Berechnen Sie $f'(\sqrt[3]{0.5})$.

d) Berechnen Sie $f'(x_0)$, ohne $f(x_0)$ explizit zu bestimmen.

Aufgabe H34 (Lagrange) (2 Punkte)

Sei $U > 0$ der vorgegebene Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen $x, y, z \geq 0$, d.h. $x + y + z - U = 0$ und $x, y, z \leq \frac{U}{2}$. Bestimmen Sie, welches dieser Dreiecke mit Umfang U den größten

Flächeninhalt hat.
Hinweis: Verwenden Sie hierfür die (hier ohne Beweis angegebene) *Heronsche Formel*:

$$F = \sqrt{\frac{U}{2}\left(\frac{U}{2} - x\right)\left(\frac{U}{2} - y\right)\left(\frac{U}{2} - z\right)}$$

für den Flächeninhalt F eines Dreiecks mit Seiten x, y, z und Umfang U.